



การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง
สำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

นายรัตนชาติ กุณทล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ปีการศึกษา 2568

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง
สำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ปีการศึกษา 2568

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



ใบรับรองโครงงานวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

เรื่อง การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

โดย นายรัตนชาติ กุณฑล

ได้รับอนุมัติให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย / หัวหน้าภาควิชา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ จันทรวีวัฒน์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ระพีณ สุนทรวัฒน์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิลาสินี ปิระจิตร)

..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ อารีพงษ์)

ชื่อ : นายรัตนชาติ ฤณพล

ชื่อวิทยานิพนธ์ : การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

สาขาวิชา : สถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิลาสินี ปิระจิตร

ปีการศึกษา : 2568

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยใช้เทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) จาก 4 วิธี คือ วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) วิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) บนแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart: EWMA) สำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล โดยงานวิจัยนี้ มุ่งเน้นศึกษาตัวแบบอนุกรมเวลาในสถานการณ์จริงภายใต้ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง วัดจากค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-control ARL: ARL₁) และทำการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) ผลการวิจัยพบว่าค่าความยาวรันเฉลี่ยที่ได้จากวิธีกฎค่ากลาง วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีกฎของเกาส์ และวิธีกฎของซิมป์สัน มีค่าใกล้เคียงกัน ในขณะที่เวลาในการประมวลผลโดยวิธีกฎค่ากลางใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับทั้ง 4 วิธี และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงได้

(มีจำนวนทั้งสิ้น 57 หน้า)

คำสำคัญ : แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเลขชี้กำลัง, ค่าความยาวรันเฉลี่ย, สมการปริพันธ์เชิงตัวเลข, ค่าความคลาดเคลื่อนขาวแบบเลขชี้กำลัง

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Name : Mr. Rattanachart Kuntol
Thesis Title : An Approximation to the Average Run Length of an
EWMA Control Chart for a Time Series Model with
Seasonality from the Numerical Integral Equation
Major Field : Applied Statistics and Data Analytics
King Mongkut's University of Technology North
Bangkok
Thesis Advisor : Assistant Professor Wilasinee Peerajit, Ph.D.
Academic Year : 2025

ABSTRACT

This study aims to investigate methods for approximating the Average Run Length (ARL) using the Numerical Integral Equation (NIE) technique through four approaches: the Midpoint Rule Method, the Trapezoidal Rule Method, the Gaussian Rule Method, and the Simpson's Rule Method. The study focuses on the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control chart for seasonal time series models. Specifically, it examines real-world time series data under the SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ model, where the exponential white noise. The evaluation is based on the out-of-control ARL (ARL_1) and the computation time (CPU Time). The results show that the ARL values obtained from the Midpoint Rule, Trapezoidal Rule, Gaussian Rule, and Simpson's Rule are comparable, while the Midpoint Rule requires the least computation time among the four methods. This approach can be effectively applied to real-world data.

(Total 57 Pages)

Keywords: EWMA Control Chart, Average Run Length, Numerical Integral Equation, Exponential White Noise

Advisor

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่องการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีจากความอนุเคราะห์และความเอาใจใส่ช่วยเหลือเป็นอย่างดี โดยเฉพาะอย่างยิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิลาสินี ปิระจิตรที่กรุณาให้ความรู้คำแนะนำ รวมทั้งความคิดเห็นต่างๆ ในการทำวิทยานิพนธ์และให้ความช่วยเหลือในการแก้ไขจุดบกพร่องต่างๆ เป็นอย่างดีมาโดยตลอด จนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้ด้วย

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ อารีพงษ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ระพีณ สุนทรวัฒน์ ที่ให้คำแนะนำต่าง ๆ และแก้ไขจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้สนับสนุนทุนทรัพย์ส่งเสริมการศึกษาที่ให้ความสนใจแก่ผู้วิจัยตลอดมาจนสำเร็จการศึกษา และขอขอบคุณรุ่นพี่ เพื่อน และรุ่นน้อง สาขาวิชาสถิติประยุกต์ ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ กำลังใจ และความช่วยเหลือผู้วิจัยเสมอมา กระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

รัตนชาติ กุณฑล

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง	ฌ
สารบัญรูปภาพ	ฎ
บทที่ 1	
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	4
1.3 ขอบเขตการวิจัย	4
1.4 เกณฑ์การประเมินประสิทธิภาพ	5
1.5 นิยามคำศัพท์	5
1.6 ประโยชน์ของการวิจัย	6
บทที่ 2	
2.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง	8
2.2 การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง	9
2.3. อนุกรมเวลาตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)s	9
2.4 ค่าความยาวรันเฉลี่ย	10
2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	13

บทที่ 3

3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย	18
3.2 แผนการทดลอง	18
3.3 ขั้นตอนการจำลองข้อมูล	19
3.4 ขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย	19

บทที่ 4

4.1. แผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0) ¹² เมื่อค่าความคลาดเคลื่อน ขามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง	24
4.2. ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข	26
4.3 วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข	29
4.4 ข้อมูลจำลอง (Simulation)	31
4.4 การประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง	47

บทที่ 5

5.1 สรุปผลการวิจัย	53
5.2 ข้อเสนอแนะ	54

บรรณานุกรม	55
------------	----

ประวัติผู้เขียน	57
-----------------	----

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4-1 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	32
4-2 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	32
4-3 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	33
4-4 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	34
4-5 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	35
4-6 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	35
4-7 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	39
4-8 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	40
4-9 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	40
4-10 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	42
4-11 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	42
4-12 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	43
4-13 ข้อมูลราคาย้อนหลังของ หุ้น CPF (บาท)	48

- 4-14 การเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ
SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $ARL_0 = 370$ โดยใช้วิธีกึ่งของค่ากลาง 49
- 4-15 การเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ
SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $ARL_0 = 500$ โดยใช้วิธีกึ่งของค่ากลาง 50



สารบัญรูปภาพ

ภาพที่	หน้า
3-1 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของเกาส์	20
3-2 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของค่ากลาง	21
3-3 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยของสี่เหลี่ยมคางหมู	22
3-4 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของซิมป์สัน	23
4-1 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	37
4-2 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$	38
4-3 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	45
4-4 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0) ₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$	46
4-5 ประสิทธิภาพในการตรวจจับของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริงเมื่อ $ARL_0 = 370$	51
4-6 ประสิทธิภาพในการตรวจจับของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริงเมื่อ $ARL_0 = 500$	51

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในกระบวนการผลิตทางอุตสาหกรรม สามารถเกิดความผันแปรของตัวแปรได้สม่ำเสมอ ความผันแปรต่าง ๆ เกิดขึ้นได้จากหลายปัจจัย ซึ่งความผันแปรเหล่านั้นจะส่งผลกระทบต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ เพื่อเป็นการควบคุมคุณภาพของตัวแปรผลิตให้สม่ำเสมอ จึงมีแนวคิดเกี่ยวกับการควบคุมคุณภาพของผลิตภัณฑ์ขึ้น เพื่อให้ตัวแปรผลิตอยู่ในระดับมาตรฐาน โดยการเตือนให้ผู้ผลิตทราบว่า ตัวแปรผลิตได้เปลี่ยนแปลงไปจากเกณฑ์ที่กำหนด เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดข้อบกพร่องหรือเสียหายจากตัวแปรผลิต

การควบคุมตัวแปรเชิงสถิติ (Statistical Process Control: SPC) คือการนำวิธีการทางสถิติมาใช้ในการตรวจสอบและควบคุมคุณภาพของตัวแปรผลิต ซึ่งจะช่วยให้มั่นใจได้ว่าตัวแปรทำงานอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งเครื่องมือในการควบคุมตัวแปรเชิงสถิติมีหลากหลายวิธี เช่น แผ่นตรวจสอบ (Check Sheet) ฮิสโทแกรม(Histogram) แผนภาพพาเรโต(Pareto Diagram) แผนภาพก้างปลา (Fishbone Diagram) และเครื่องมือที่ได้รับความนิยมและมีประสิทธิภาพ คือแผนภูมิควบคุม (Control Chart) ซึ่งแผนภูมิควบคุม จึงเป็นเครื่องมือที่จะช่วยในการวิเคราะห์และตรวจสอบความผิดปกติของตัวแปรผลิตนำไปสู่การปรับปรุงตัวแปรอย่างต่อเนื่อง ในปี ค.ศ.1931 Shewhart ได้คิดค้นแผนภูมิควบคุมขึ้นเป็นครั้งแรก เรียกว่า แผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท (Shewhart Control Chart) เป็นแผนภูมิใช้งานง่ายและมีประสิทธิภาพมากในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ของค่าเฉลี่ยหรือความผันแปรของตัวแปร และตั้งแต่นั้นเป็นต้นมาก็ได้มีแผนภูมิควบคุมประเภทอื่น ๆ อีกมากมาย ได้รับการพัฒนา แต่เนื่องจากแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ททำงานได้ไม่ดีนักสำหรับการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็กน้อยถึงปานกลาง ในปี ค.ศ. 1954 Page จึงได้เสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum Control Chart: CUSUM) และต่อมา ในปี ค.ศ.1959 Roberts ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) ทั้งสองแผนภูมิควบคุมนี้เป็นแผนควบคุมที่เหมาะสมกับข้อมูลประเภทความจำโดยจะนำข้อมูลที่เก็บมาตั้งแต่ในอดีตจนถึงปัจจุบันมาใช้ในการคำนวณซึ่งในปี ค.ศ.1991 Champ, C. W., & Rigdon, S. E. ได้พูดไว้ว่าแม้ทั้งสองแผนภูมิควบคุมนี้ใช้งานได้ดีแต่แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังเป็นแผนภูมิควบคุมที่นำไปใช้งานง่ายกว่า

ตัวแบบอนุกรมเวลา SARFIMA (Seasonal Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) อันดับ p, d, q, P, D, Q เรียกโดยย่อว่า SARFIMA($p, d, q|P, D, Q$) เป็นตัว

แบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล โดยมี d เป็นพารามิเตอร์ผลต่างเศษส่วน (Fractional Differencing Parameter) และ D เป็นพารามิเตอร์การต่างเศษส่วนแบบฤดูกาล (Seasonal Fractional Differencing Parameter) ตามลำดับ ตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q) เป็นการพัฒนามาจากตัวแบบ ARFIMA(p, d, q) ถูกเสนอขึ้นโดย Granger และ Joyeux (1980) เวลาต่อมาในปี 1981 Hosking (1981) ได้เสนอตัวแบบ ARFIMA(p, d, q) ที่มีกระบวนการความจำระยะยาว (Long-Memory Process) โดย Hosking (1981) ได้อภิปรายเกี่ยวกับคุณสมบัติที่เป็นประโยชน์ของตัวแบบเหล่านี้อย่างกว้างขวาง เช่น ฤดูกาลคงที่ (Stationarity), คุณสมบัติผกผัน (Invertibility), และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation Function) ในแง่ของฤดูกาล (Seasonality) ในอนุกรมเวลา โดยฤดูกาลหมายถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นประจำทุกปี เช่น ข้อมูลรายเดือน รายไตรมาส เป็นต้น การมีอยู่ของทั้ง หน่วยความจำระยะยาว (Long-Memory หรือ Long-Range Dependence) และ ฤดูกาล (Seasonality) ในข้อมูลจริงจากหลายสาขา เช่น ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ ฟิสิกส์ และอุทกวิทยา ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากในวรรณกรรมทางวิชาการ ตัวอย่างของการนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ได้แก่ อัตราการว่างงานรายเดือนของผู้ชายในสหรัฐฯ (Carlin และ Dempster, 1989), รายได้จากผลิตภัณฑ์ของ IBM รายเดือน (Ray, 1993), พยากรณ์โรคติดเชื้อโดยเฉพาะโรค HFRS (Qi, Zhang, Zhu, Liu, Chunyu Li, Wang และ Xiujun Li, 2020), พยากรณ์อุณหภูมิ ในรัฐโอregon ประเทศไนจีเรีย (Adewole และ Amurawaye, 2024), พยากรณ์ข้อมูลรังสีดวงอาทิตย์ (UDO M. E. และ Shittu O. I, 2022) และคาดการณ์ราคาฟริก (Devianto, Wahyuni, Maiyastri and Yollan, 2024) เป็นต้น โดยในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษารูปแบบอนุกรมเวลาในสถานการณ์จริงภายใต้ตัวแบบ SARFIMA($1, 0, 0$)($1, D, 0$)₁₂ ซึ่งในงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้นทั้งหมดใช้ค่าความคลาดเคลื่อนขาวที่มีการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian White Noise)

เมื่อพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนขาว (White Noise) คือความแตกต่างระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณซึ่งจะเกิดความแม่นยำสูงเมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีขนาดเล็ก ซึ่งโดยทั่วไปค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเกาส์และเกิดจากการสังเกตที่มีความสัมพันธ์ในตัวเอง (Autocorrelation) อย่างไรก็ตาม บางครั้งความคลาดเคลื่อนขาวในข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ในตัวเอง ไม่มีการแจกแจงแบบปกติ ทำให้แบบจำลองอนุกรมเวลาที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential White Noise) งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้เช่น Jacob และ Lewis (1977) ได้ศึกษาตัวแบบ ARMA($1,1$) ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาวแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ในเวลาต่อมา Mohamed และ Hocine (2003) ได้ทำการวิเคราะห์แบบเบย์ (Bayesian Analysis) สำหรับ AR(1) ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ต่อมา Peerajit (2023) ได้ทำการประมาณค่า ARL ของตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q) ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจก

แจกแจงแบบเลขชี้กำลังบนแผนภูมิควบคุม CUSUM ค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาหามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังจึงเป็นกรณีที่น่าสนใจสำหรับงานวิจัยนี้

การวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม ได้โดยใช้ค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยพิจารณาจาก 2 สถานะ คือ ตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม (In-control ARL: ARL_0) และตัวแบบไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-control ARL: ARL_1) โดยค่าความยาวรันเฉลี่ยสามารถคำนวณได้หลายวิธีเช่น การจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulations) หรือ วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation) เป็นต้น โดยในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation Method: NIE) (Champ and Rigdon, 1991) วิธีนี้จะใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงในการประมาณค่า ARL โดยมี 4 วิธี คือวิธีการประมาณแบบเกาส์ (Gauss Quadrature) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และ วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ ได้แก่ Brook และ Evans (1972) ซึ่งเป็นงานบุกเบิกที่ใช้แนวคิดสมการปริพันธ์เพื่อวิเคราะห์การกระจายของแผนภูมิควบคุม CUSUM และเป็นรากฐานของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ในภายหลัง ต่อมา Lucas และ Crosier (1982) ได้นำวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขไปประยุกต์กับแผนภูมิควบคุม CUSUM แบบ Fast Initial Response (FIR) เพื่อประเมินค่า ARL อย่างแม่นยำ และ งานของ Champ และ Rigdon (1991) ยังได้ใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมหลายประเภท ได้แก่ แผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท, แผนภูมิควบคุม CUSUM และ แผนภูมิควบคุม EWMA ต่อมา มี งานวิจัยสมัยใหม่ที่พูดถึงเช่น Peerajit (2023) ได้ทำการประมาณค่า ARL ของตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาหามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังบนแผนภูมิควบคุม CUSUM โดย วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขเป็นต้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น งานวิจัยครั้งนี้เสนอวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยใช้เทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข จาก 4 วิธี คือ วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) วิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) บนแผนภูมิ EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาหามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการเชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation) สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาลงมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

1.2.2 เพื่อประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลโดย 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) และวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1.3.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (α) ดังนี้

1.3.1.1 กรณีที่กระบวนการการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ α_0 เท่ากับ 1

1.3.1.2 กรณีที่กระบวนการการผลิตไม่อยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ α_1 เท่ากับ $\alpha_0(1+\delta)$ โดยที่ δ คือ ขนาดการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยตัวแบบ (δ) เท่ากับ 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 1

1.3.2 แผนภูมิควบคุมที่ศึกษาคือแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA)

1.3.3 กำหนดให้ขีดจำกัดล่างของแผนภูมิควบคุมมีค่าเท่ากับ 0 (แผนภูมิควบคุมทางเดียว)

1.3.2.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุมที่ทำการศึกษา ดังนี้ λ เท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15

1.3.4 ตัวแบบอนุกรมเวลา SARFIMA (Seasonal Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาลงมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

1.3.3.1 ตัวแบบอนุกรมเวลา SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ โดยค่า $D = 0.1, 0.2$ และ 0.4

1.3.3.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1, -0.1$

1.3.4 กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_0) เท่ากับ 370 และ 500

1.3.5 วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) ที่ศึกษามีโดยที่ m คือจุดแบ่งของข้อมูล ($m = 500$) ดังนี้

1.3.5.1 วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method)

1.3.5.2 วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method)

1.3.5.3 วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method)

1.3.5.4 วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

1.4 เกณฑ์การประเมินประสิทธิภาพ

1.4.1 งานวิจัยนี้พิจารณาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมจากค่าความยาวรันเฉลี่ย เมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_1) โดยใช้ค่า ARL_1 ที่น้อยที่สุด

1.4.2 งานวิจัยนี้พิจารณาจากประสิทธิภาพของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) คือเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

1.5 นิยามคำศัพท์

1.5.1 แผนภูมิควบคุม (Control chart) คือเครื่องมือที่แสดงให้เห็นแนวโน้มของข้อมูลอย่างต่อเนื่อง สะท้อนต่อการควบคุมตัวแบบผลิตให้อยู่ภายใต้การควบคุมใช้เพื่อวัดความสามารถของตัวแบบ (Process Capability) และ ติดตามตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบ

1.5.2 ค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) คือจำนวนตัวอย่างเฉลี่ยที่จะไม่อยู่ภายใต้ขีดจำกัดการควบคุมเป็นค่าแรก โดยแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้ขีดจำกัดการควบคุม (ARL_0) และค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ขีดจำกัดการควบคุม (ARL_1)

1.5.3 วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) คือการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งที่สอดคล้องกับช่วงที่กำหนด

1.6 ประโยชน์ของการวิจัย

1.6.1 ได้วิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง

1.6.2 ได้ทางเลือกในการวัดประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของแผนภูมิควบคุมอื่นๆ บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เพื่อเปรียบเทียบในสถานการณ์ต่างๆ ของข้อมูลตัวแบบ SARFIMA บนแผนภูมิควบคุมอื่นๆ เช่น Modified EWMA, Double EWMA เป็นต้น



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) สำหรับควบคุมการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบเมื่อค่าสังเกตคือตัวแบบ SARFIMA (Seasonal Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) หรือ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential White Noise) สำหรับการเปลี่ยนแปลงตัวแบบของแต่ละสถานการณ์พร้อมทั้งเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับการเปลี่ยนแปลงตัวแบบ SARFIMA โดยเกณฑ์การประเมินประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบของแผนภูมิควบคุม คือค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) โดยทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

- 2.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง
- 2.2 การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง
- 2.3 อนุกรมเวลาตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s
- 2.4 ค่าความยาวรันเฉลี่ย
- 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง

ในปี ค.ศ. 1926 Shewhart เป็นผู้แนะนำการทำแผนภูมิควบคุมเป็นครั้งแรก แผนภูมิควบคุมเป็นหนึ่งในเทคนิคที่สำคัญที่สุดของการควบคุมตัวแบบทางสถิติมีการใช้งานอย่างแพร่หลายและมีประสิทธิภาพ วัตถุประสงค์หลักของแผนภูมิควบคุมคือการส่งสัญญาณเมื่อตัวแบบออกนอกขีดจำกัดควบคุม เพื่อป้องกันและดำเนินการแก้ไขกำจัดสาเหตุที่สามารถจะระบุได้

Roberts [3] เสนอแผนภูมิควบคุมควบคุม EWMA ซึ่งเป็นแผนภูมิที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีตและปัจจุบันที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบผลิตที่มีขนาดเล็ก ซึ่งค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงดังสมการที่ (2-1) ดังนี้

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t ; t = 1, 2, \dots \quad (2-1)$$

โดยที่ Z_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA ณ คาบเวลาที่ t

X_t แทน ค่าสังเกต ณ คาบเวลาที่ t

λ แทน ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยที่ $0 < \lambda \leq 1$

ขีดจำกัดควบคุมบน (Upper Control Limit: UCL) เส้นกึ่งกลาง (Control Limit: CL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower Control Limit: LCL) ของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงดังสมการที่ (2-2)

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = b \\ CL &= \mu_0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = 0$$

โดยที่ μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแบบที่อยู่ภายใต้การควบคุม

L แทน ค่าพารามิเตอร์ของขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม EWMA

σ แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

λ แทน ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยที่ $0 < \lambda \leq 1$

กำหนดให้ τ_b แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมจะส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุมแสดงดังนี้

$$\tau_b = \inf \{t > 0; Z_t \geq b\}; b \geq u \quad (2-3)$$

โดย b แทนขีดจำกัดบนของแผนภูมิควบคุม EWMA

2.2 การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

ในกระบวนการผลิตหากข้อมูลที่มีลักษณะเป็นช่วงเวลา อาทิเช่น อายุการใช้งาน ของผลิตภัณฑ์ โดยข้อมูลลักษณะนี้จะมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง กำหนดให้ค่าสังเกต $X_1, X_2, \dots$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่เหมือนกัน (Independent and Identically Distribution)

$$X_t \sim \begin{cases} EXP(\alpha_0); t = 1, 2, \dots, v \\ EXP(\alpha_1); t = v, v+1, \dots \end{cases}$$

โดยที่ α_0 แทน ค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม

α_1 แทน ค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม

v แทน คาบเวลาของกระบวนการที่เกิดการเปลี่ยนแปลง

กำหนดให้ X คือตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}; x > 0, \alpha > 0 \\ 0 & ; other \end{cases}$$

โดยที่ α แทน ค่าพารามิเตอร์ของช่วงเวลารอคอยจนกระทั่งพบว่าเกิดความสำเร็จครั้ง

แรกซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{1}{\alpha}$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{1}{\alpha^2}$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสะสม คือ

$$F(x; \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-\alpha x}; x > 0, \alpha > 0 \\ 0 & ; other \end{cases}$$

2.3. อนุกรมเวลาตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s

ตัวแบบ Seasonal Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average (SARFIMA) อันดับที p, d, q, P, D, Q เรียกโดยย่อว่า ตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s ในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนขาวแบบเลขชี้กำลัง ได้ตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s แสดงดังสมการที่ (2-4) ดังนี้

$$\begin{aligned} & X_t (1 - B^s)^D (1 - B)^d (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{Ps}) \\ & = \mu + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) (1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{Qs}) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2-4)$$

โดยที่ X_t แทน ค่าสังเกต ณ เวลา t

s แทน คาบเวลาของฤดูกาล (Seasonal Periodicity)

d แทน พารามิเตอร์ของการทำส่วนต่างแบบเศษส่วนโดยที่ $-0.5 < d < 0.5$

D แทน พารามิเตอร์ของการทำส่วนต่างแบบเศษส่วนตามฤดูกาลโดยที่

$$-0.5 < D < 0.5$$

μ แทน ค่าคงที่

ϕ_i แทน พารามิเตอร์ของการถดถอยในตัวที่ i

Φ_i แทน พารามิเตอร์ของการถดถอยในตัวเป็นส่วนของฤดูกาลที่ i

θ_i แทน พารามิเตอร์ของการเฉลี่ยเคลื่อนที่โดยที่ $i, i = 1, 2, \dots, q, -1 < \theta_i < 1$

Θ_i แทน พารามิเตอร์ของการเฉลี่ยเคลื่อนที่เป็นส่วนของฤดูกาลที่โดยที่
 $i, i = 1, 2, \dots, Q, -1 < \Theta_i < 1$

$(1-B)^d$ แทน ตัวดำเนินการผลต่างเศษส่วน (Fractional Difference Operator) อันดับที่ d

$(1-B^s)^D$ แทน ตัวดำเนินการผลต่างเศษส่วนที่มีฤดูกาล (seasonal Fractional Difference Operator) อันดับที่ D

B แทน ตัวดำเนินการย้อนกลับ (Backward Shift Operator) โดยที่ $B^s Y_t = Y_{t-s}$

ε_t แทน ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

จากตัวดำเนินการผลต่างเศษส่วน $(1-B)^d$ และ $(1-B^s)^D$ จากสมการที่ (2-4) สามารถจัดรูปได้ดังสมการที่ (2-5) และ (2-6) ได้ดังนี้

$$(1-B)^d = 1 - dB + \frac{d(d-1)}{2!} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} B^3 + \dots \quad (2-5)$$

และ

$$(1-B^s)^D = 1 - DB^s + \frac{D(D-1)}{2!} B^{2s} - \frac{D(D-1)(D-2)}{3!} B^{3s} + \dots \quad (2-6)$$

2.4 ค่าความยาวรันเฉลี่ย

ในปี ค.ศ. 2012 Suriyakat et al. ได้เสนอวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนขาที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยประมาณค่า ARL สามารถเขียนให้อยู่ในวิธีสมการปริพันธ์ (Integral Equation) ลักษณะเดียวกับสมการเฟรดโฮล์ม (Fredholm Integral Equation) ในส่วนนี้จะนำเสนอวิธีการหาค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA

กำหนดให้ Z_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA ซึ่งกำหนดไว้ดังสมการ (2-1) โดยที่ $X_1, X_2, \dots$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันที่ค่าความคลาดเคลื่อนขาที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง กำหนดให้ $L(u)$ แทนค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA

$$ARL = L(u) = E_\infty(\tau_b) \geq T \quad (2-7)$$

โดยที่ τ_b แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม

หากค่าเริ่มต้นของค่าสถิติ EWMA คือ Z_0 . มีค่าเท่ากับ u แล้ว ค่าสถิติ u ที่ได้จากค่าสังเกต X_i จะเป็นไปได้ 3 กรณี คือ กรณีที่ 1 เมื่อ X_1 มีค่ามาก ($X_1 - a \geq b - u$) จะพบว่าค่าความยาวรันเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากับ 1 เนื่องจากแผนภูมิควบคุมจะส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุมในทันที กรณีที่ 2 เมื่อ X_1 มีค่าน้อย ($X_1 - a \leq -u$) ค่าความยาวรันจะมีค่าเท่ากับ L_0 กรณีที่ 3 เมื่อ X_1 มีค่าปานกลาง ($-u < X_1 - a < b - u$) ค่าความยาวรันจะมีค่าเท่ากับ $L_1(u + (X_1 - a))$ สูตรการคำนวณค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงได้ดังนี้ (2-8)

$$L(u) = 1 + L_Z [I(0 < Z_1 < b)L(Z_1)] + P_z \{Z_1 = 0\}L(0) \quad (2-8)$$

ดังนั้นค่า ARL โดยวิธีสมการปริพันธ์ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อ กำหนดค่าเริ่มต้น $Z_0 = u$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 - P \left[\frac{H_L - (1 - \lambda) - k}{\lambda} < \varepsilon_1 < \frac{H_U - (1 - \lambda) - k}{\lambda} \right] \\ &\quad + \int_{\frac{H_L - (1 - \lambda) - k}{\lambda}}^{\frac{H_U - (1 - \lambda) - k}{\lambda}} 1 + L((1 - \lambda)u + \lambda y + k) dy \\ L(u) &= 1 + \int_{\frac{H_L - (1 - \lambda) - k}{\lambda}}^{\frac{H_U - (1 - \lambda) - k}{\lambda}} L((1 - \lambda)u + \lambda y + k) f(y) dy \end{aligned} \quad (2-9)$$

โดยค่า k สามารถหาค่าได้จากสมการที่ (2-10) ดังนี้

$$\begin{aligned} k &= \lambda(\mu + D(x_{t-1} - \phi_1 x_{t-12}) - D(\Phi_1 x_{t-12^2}) - D(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+1)12}) \\ &\quad - \frac{D(1-D)}{2!}(x_{t-12} - \phi_1 x_{t-2(12)}) + \frac{D(1-D)}{2!}(\Phi_1 x_{t-(12+1)12}) - \frac{D(1-D)}{2!}(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+1)12}) \\ &\quad + \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(x_{t-2(12)} - \phi_1 x_{t-3(12)}) + \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(\Phi_1 x_{t-(12+2)12}) \\ &\quad - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+3)(12)}) \dots) \end{aligned} \quad (2-10)$$

วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration Equation Method) ที่ใช้ในงานวิจัย 4 วิธี ดังนี้

2.4.1 วิธีกฎของเกาส์ควอดราเจอร์ (Gaussian quadrature rule)

สำหรับกฎของเกาส์ ฟังก์ชัน $W(y) = 1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, h]$ แบ่งเป็นช่วงย่อย m ช่วง คือ $\{y_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ กฎของเกาส์ควอดราเจอร์จะนิยามเซตของ $a_j = \frac{h}{m} \left(j - \frac{1}{2} \right); j = 1, 2, \dots, m$ โดยที่ $0 < a_1 < \dots < a_m < h$ และเซตของค่าน้ำหนัก $w_k = h / m \geq 0; k = 0, 1, 2, \dots, m$ เป็นค่าคงที่ วิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยวิธีกฎของเกาส์ควอดราเจอร์ (Gaussian quadrature rule)

$$\text{อยู่ในรูป } \int_0^h W(y)f(y)dy \approx \sum_{k=1}^m w_k f(a_k)$$

2.4.2 วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule)

สำหรับกฎค่ากลาง กำหนดให้ฟังก์ชัน $W(y) = 1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, h]$ แบ่งเป็นช่วงย่อย m ช่วง คือ $\{[y_{j-1}, y_j], j = 1, 2, \dots, m\}$ โดยมีความกว้างเท่ากับ $b = \frac{h-0}{m}$ และมีระยะห่างที่เท่ากันคือ $\{y_j = y_0 + jb, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ ดังนั้น $y_0 = 0$ และ $y_m = h$ วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) สามารถเขียนได้ในรูป

$$M(f, b) = b \sum_{j=1}^m f \left(a + \left(j - \frac{1}{2} \right) b \right); j = 0, 1, 2, \dots, m$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ ในช่วง $[0, h]$ อยู่ในรูป $\int_0^h f(y)dy \approx M(f, b)$

2.4.3 วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู กำหนดให้ฟังก์ชัน $W(y) = 1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, h]$ แบ่งเป็นช่วงย่อย m ช่วง คือ $\{[y_{j-1}, y_j], j = 1, 2, \dots, m\}$ โดยมีความกว้างเท่ากับ $b = \frac{h-0}{2m}$ และมีระยะห่างที่เท่ากันคือ $\{y_j = y_0 + jb, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ $y_0 = 0$ และ $y_m = h$ วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) สามารถเขียนได้ในรูป

$$T(f, b) = \frac{b}{2} (f(0) - f(h)) + b \sum_{k=1}^m f(y_j); j = 0, 1, 2, \dots, m$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ ในช่วง $[0, h]$ อยู่ในรูป $\int_0^h f(y)dy \approx T(f, b)$

2.4.4 วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

สำหรับกฎของซิมป์สัน กำหนดให้ฟังก์ชัน $W(y)=1$ และช่วงของการอินทิกรัล $[0, h]$ แบ่งเป็น $2m$ ช่วงย่อย คือ $\{[y_{j-1}, y_j], k=1, 2, \dots, 2m\}$ โดยมีความกว้างเท่ากับ $b = \frac{h-0}{2m}$ และมีระยะห่างเท่ากัน $\{y_j = y_0 + jb, j=1, 2, \dots, 2m\}$ ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $y_0 = 0$ และ $y_{2m} = h$ จากกฎพื้นฐานของซิมป์สันที่ใช้กับช่วงย่อย 2 ช่วงย่อย และกำหนดตัวถ่วงน้ำหนัก w_j คือ $y_{2j}, y_{2j+1}, y_{2j+2}$ ดังนั้นพหุนามองศาที่ $\{1, y, y^2\}$ ได้ถูกรวมโดยกฎของซิมป์สัน มีค่าน้ำหนักของจุดย่อยทั้ง 3 คือ $\left\{\frac{1}{3}b, \frac{4}{3}b, \frac{1}{3}b\right\}$ สำหรับกฎของคอมโพสิตซิมป์สันเป็นการแบ่งช่วง $[0, h]$ ออกเป็นช่วงย่อยด้วยความกว้างเท่ากับ $2b$ ดังนั้น กฎของคอมโพสิตซิมป์สันสามารถเขียนได้ในรูป

$$S(f, b) = \frac{b}{3}(f(0) - f(h)) + \frac{2b}{3} \sum_{j=1}^m f(y_{2j}) + \frac{4b}{3} \sum_{j=1}^m f(y_{2j-1}); j=1, 2, \dots, m$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ ในช่วง $[0, h]$ อยู่ในรูป $\int_0^h f(y) dy \approx S(f, b)$

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Shewhart (1931) ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมขึ้นเป็นครั้งแรกเพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในตัวแบบผลิต ซึ่งแผนภูมิควบคุมจะอาศัยหลักการทางสถิติเข้ามาประยุกต์ใช้และแผนภูมิควบคุมของชีวฮาร์ทสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยเมื่อตัวแบบมีการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ เนื่องจากแผนภูมินี้ไม่ได้ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีต

Roberts (1959) ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (EWMA) ซึ่งเป็นแผนภูมิที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีต โดยหลักการคือการนำเอาข้อมูลตลอด ช่วงระยะเวลาของการเก็บรวบรวมมาใช้ซึ่งพบว่าแผนภูมิควบคุม EWMA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท เมื่อค่าเฉลี่ยของตัวแบบเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

Brook และ Evans (1972) พัฒนาวิธีการวิเคราะห์การแจกแจงความน่าจะเป็นของ CUSUM control chart โดยใช้สมการปริพันธ์เชิงตัวเลข เพื่อประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ทั้งในกรณีตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุมและตัวแบบไม่อยู่ภายใต้การควบคุม สามารถประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิ CUSUM ได้อย่างแม่นยำมากกว่าการจำลองแบบ Monte Carlo

Jacob และ Lewis (1977) การวิเคราะห์อนุกรมเวลาด้วยข้อผิดพลาดที่ไม่แจกแจงแบบปกติ เช่น แบบเลขชี้กำลัง ให้ผลการประมาณค่าที่แม่นยำและเหมาะสมมากกว่าโมเดลที่สมมติว่าข้อผิดพลาดเป็นแบบปกติ โดยเฉพาะในกรณีที่ข้อมูลจริงมีการเบี่ยงเบนจากความเป็นปกติ ทั้งนี้ยังเน้นว่าการเลือกแบบจำลองที่ตรงกับลักษณะข้อมูลมีผลต่อความถูกต้องของการวิเคราะห์และการพยากรณ์ โดยใช้ข้อมูลปริมาณออกซิเจนละลายในแม่น้ำกับอัตราการไหลของน้ำในแม่น้ำ

Granger และ Joyeux (1980) เสนอแนวคิด fractional differencing และแบบจำลอง ARFIMA ซึ่งเป็นการพัฒนาเพิ่มเติมจาก ARIMA โดยให้ค่าความต่างระดับ d เป็น เลขเศษส่วน แทนที่จะเป็นจำนวนเต็ม เพื่ออธิบายพฤติกรรมของอนุกรมเวลาที่มีความจำระยะยาว (long memory) โมเดลนี้ช่วยให้วิเคราะห์ข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงช้าและมีความสัมพันธ์ในระยะยาวได้แม่นยำขึ้น และมีการนำไปใช้ในหลายสาขา เช่น เศรษฐศาสตร์และอุตุนิยมวิทยา

Hosking (1981) ได้นำเสนอและนิยามแบบจำลอง ARFIMA (p, d, q) อย่างเป็นทางการ โดยชี้ให้เห็นว่าเมื่อ d เป็นเลขเศษส่วน จะสามารถอธิบายอนุกรมเวลาที่มีความจำระยะยาว (long memory) ได้ดีกว่า ARIMA ทั่วไป นอกจากนี้ยังอธิบายคุณสมบัติทางสถิติของโมเดล เช่น ความนิ่ง และโครงสร้างของความสัมพันธ์อัตโนมัติ ทำให้งานนี้กลายเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาและประยุกต์ใช้ ARFIMA ในงานวิจัยต่าง ๆ

Lucas & Crosier (1982) นำแนวคิด Fast Initial Response (FIR) มาประยุกต์กับแผนภูมิควบคุม CUSUM โดยปรับค่าเริ่มต้นของแผนภูมิควบคุม CUSUM ให้ใกล้เคียงเขตการควบคุมมากขึ้น ทำให้สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ ของกระบวนการได้เร็วขึ้นตั้งแต่เริ่มต้น ลดค่า ARL_1 สำหรับ small shifts โดยไม่กระทบค่า ARL_0 ของกระบวนการปกติโดยใช้สมการปริพันธ์เชิงตัวเลขในการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย

Carlin และ Dempster (1989) เสนอการใช้วิธี Bayesian ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา โดยเฉพาะในแบบจำลอง state-space พร้อมใช้เทคนิค MCMC เพื่อประมาณพารามิเตอร์และพยากรณ์ข้อมูลที่มีความไม่แน่นอนสูง งานนี้เป็นหนึ่งในผลงานแรก ๆ ที่แสดงให้เห็นถึงพลังของ Bayesian ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ซับซ้อน และเป็นพื้นฐานสำคัญของงานวิจัยด้าน Bayesian time series ในยุคต่อมา

Champ และ Rigdon (1991) ศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคุณภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยตัวแบบที่มีแนวโน้มเชิงเส้นโดยใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข พบว่าแผนภูมิ CUSUM และ EWMA สามารถตรวจจับแนวโน้มได้ดีกว่าแผนภูมิ Shewhart โดยเฉพาะเมื่อแนวโน้มมีขนาดเล็กถึงปานกลาง ทั้งนี้ แผนภูมิ CUSUM และ EWMA ให้ผลใกล้เคียงกันในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบ

Ray (1993) ศึกษาการพยากรณ์ข้อมูลที่มี long memory คือข้อมูลรายเดือนของรายได้จากผลิตภัณฑ์ของบริษัท IBM โดยใช้โมเดล ARFIMA เทียบกับโมเดล ARIMA และพบว่า ARFIMA ให้ผลการพยากรณ์แม่นยำกว่าโมเดลทั่วไปอย่าง ARIMA เมื่อนำไปใช้กับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ระยะยาวงานนี้จึงเน้นถึงความเหมาะสมของ ARFIMA สำหรับการพยากรณ์อนุกรมเวลาที่ซับซ้อน

Mohamed และ Hocine (2003) ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง AR(1) เมื่อข้อผิดพลาดมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยใช้วิธีแบบเบย์ (Bayesian estimation) ซึ่งให้ผลแม่นยำกว่าวิธีปกติ

Qi, Zhang, Zhu, Liu, Chunyu Li, Wang และ Xiujun Li (2020) ได้พัฒนาและประยุกต์ใช้แบบจำลอง SARFIMA (Seasonal Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) เพื่อพยากรณ์การเกิดโรค Hemorrhagic Fever with Renal Syndrome (HFRS) ในเมืองเว่ย์ฟาง (Weifang) มณฑลซานตง ประเทศจีน ระหว่างปี 2005–2018 โดยเปรียบเทียบกับแบบจำลอง SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average) ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในงานวิจัยด้านโรคติดต่อ

Suriyakat et al. (2012) ศึกษาแผนควบคุมคุณภาพ EWMA สำหรับกระบวนการ AR(1) ที่มีค่าคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยเสนอสูตรคำนวณค่าความยาวรันเฉลี่ย ผ่านสมการเชิงอนุพันธ์ ผลการศึกษาชี้ว่าแผน EWMA สามารถตรวจจับความผิดปกติในกระบวนการอย่างมีประสิทธิภาพและแม่นยำภายใต้สมมติฐานค่าความคลาดเคลื่อนขาวแบบเลขชี้กำลัง

Udo & Shittu (2022) วิเคราะห์ข้อมูลพลังงานแสงอาทิตย์รายเดือนโดยเปรียบเทียบตัวแบบ SARIMA กับ SARFIMA พบว่าตัวแบบ SARFIMA มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงกว่า เนื่องจากสามารถสะท้อนลักษณะฤดูกาลและการพึ่งพาเชิงเวลาระยะยาวได้ดีกว่าตัวแบบ SARIMA

Peerajit (2023) พัฒนาวิธีตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยในข้อมูลที่มีความจำยาว (long-memory) ด้วยแบบจำลอง ARFIMA โดยค่าคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และใช้แผนภูมิควบคุมแบบ Modified EWMA ซึ่งพบว่ามีประสิทธิภาพสูงกว่ารูปแบบปกติในการตรวจจับความผิดปกติ โดยเฉพาะเมื่อข้อมูลมีลักษณะไม่เป็นปกติและไม่อิสระต่อกัน เหมาะสำหรับการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมหรือระบบที่ซับซ้อน

Adewole และ Amurawaye (2024) ศึกษาการพยากรณ์อุณหภูมิในรัฐ Ogun ประเทศไนจีเรีย โดยเปรียบเทียบแบบจำลอง SARFIMA กับ SARIMA พบว่า SARFIMA สามารถจับลักษณะข้อมูลที่มีฤดูกาลและความจำระยะยาวได้ดีกว่า

Devianto, Wahyuni, Maiyastri และ Yollan (2024) สร้างโมเดล SARFIMAX เพื่อคาดการณ์ราคาพริกโดยพิจารณาฤดูกาล ความจำระยะยาว และตัวแปรภายนอก เช่น เดือนมกราคม และช่วงก่อนเทศกาลฮิลฟีตริ พบว่าโมเดลนี้ให้ความแม่นยำสูงและเหมาะสำหรับการวางแผนนโยบายด้านราคา.



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ ที่ค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential White Noise) เมื่อพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักต่างกัน โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) จากนั้นได้ทำการเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (CPU Time) สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA และเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบของแผนภูมิควบคุม EWMA ที่พารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักต่างกันโดยพิจารณาจากค่า ARL ที่น้อยที่สุดเป็นเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพสำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีที่ใช้ในการดำเนินการวิจัย ดังนี้

- 3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย
- 3.2 แผนการทดลอง
- 3.3 ขั้นตอนการจำลองข้อมูล
- 3.4 ขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย

3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในการศึกษานี้จะทำการจำลองข้อมูลโดยใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยมีขั้นตอนการดำเนินการวิจัย ดังนี้

3.1.1 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ทั้ง 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

3.1.2 ศึกษาตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential White Noise)

3.1.3 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับแผนภูมิควบคุม EWMA

3.1.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์และระดับการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม

3.1.5 เปรียบเทียบวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA ที่พารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักต่างกันจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) และประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL)

3.1.6 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยพิจารณาจากค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ที่น้อยที่สุดเป็นเกณฑ์ในการตรวจสอบประสิทธิภาพ

3.1.7 ประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุม EWMA กับข้อมูลจริง

3.1.8 สรุปผลการวิจัย

3.2 แผนการทดลอง

ในงานวิจัยนี้ทำการเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ทั้ง 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) เมื่อข้อมูลมีตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ D มีค่าเท่ากับ 0.1, 0.2 และ 0.4 โดยเปรียบเทียบที่ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุมที่ทำการศึกษา (λ) มีค่าเท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15 กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_0) เท่ากับ 370 และ 500 โดยกำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยตัวแบบ (δ) เท่ากับ 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 1 ตามลำดับ

3.3 ขั้นตอนการจำลองข้อมูล

3.3.1 เมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้ขีดจำกัดการควบคุม (in-control process) กำหนดให้ข้อมูลตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ โดยค่า $D = 0.1, 0.2$ และ 0.4

3.3.2 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุมที่ทำการศึกษา ดังนี้ λ เท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15

3.3.3 ประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ทั้ง 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

3.3.4 กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_0) เท่ากับ 370 และ 500

3.3.5 กำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยตัวแบบ เท่ากับ 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 1 ตามลำดับ

3.3.6 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_1) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) ของแต่ละวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE)

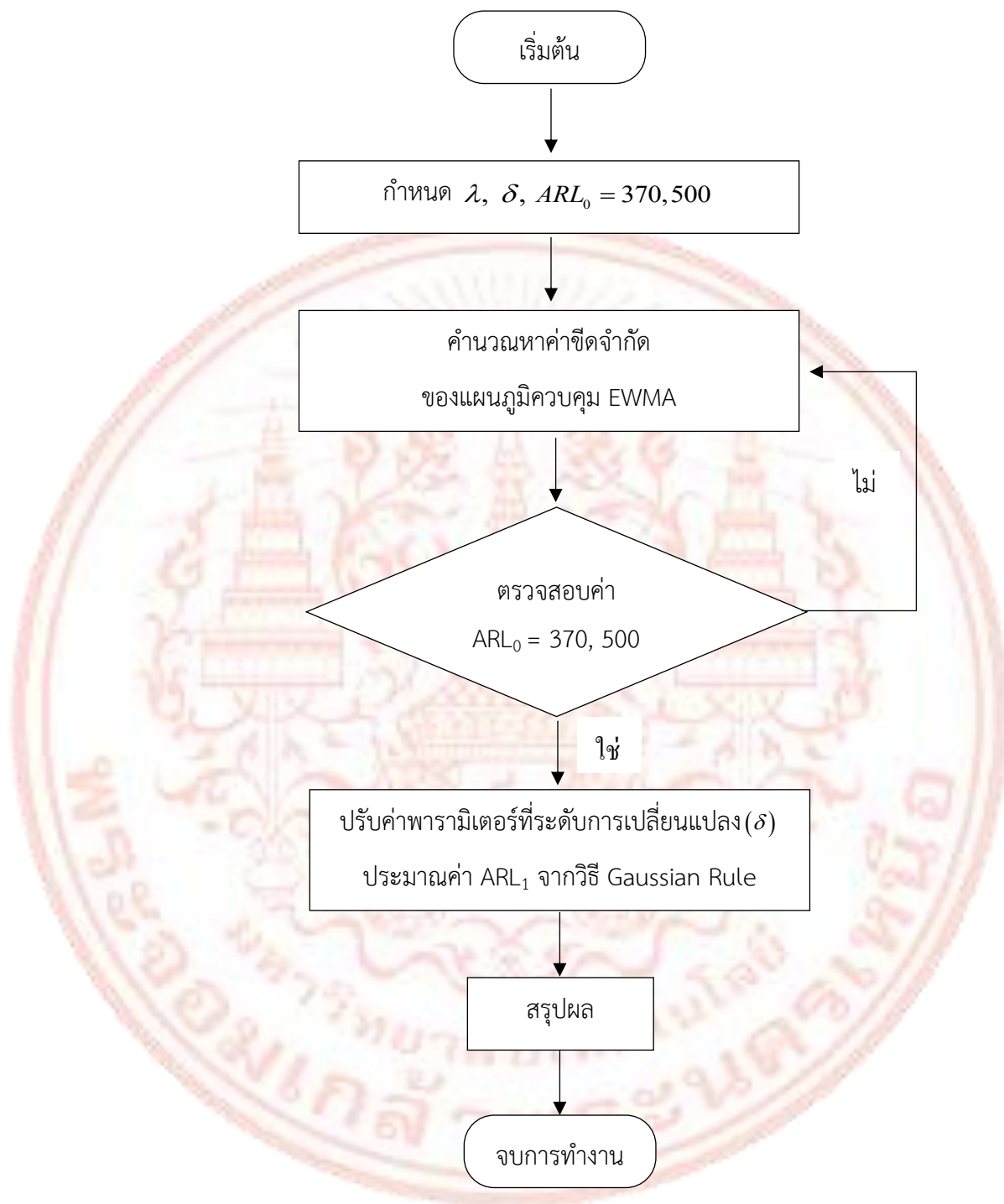
3.4 ขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย

3.4.1 ประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ทั้ง 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

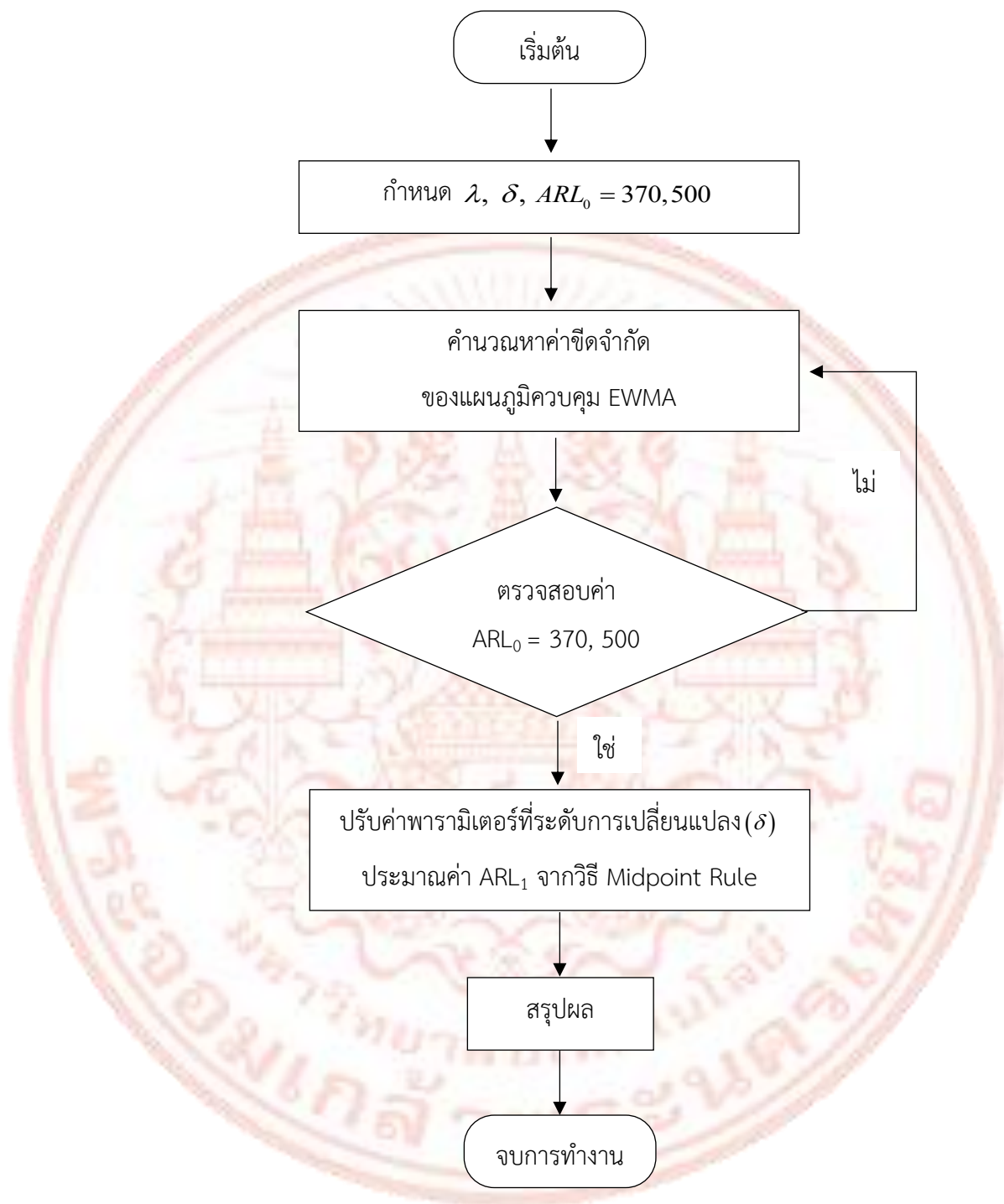
3.4.2 ทำการหาค่าประมาณ ARL_1 โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ทั้ง 4 วิธี ซึ่งใช้โปรแกรม Mathematica[®] 6 ในการคำนวณ

3.4.3 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) ในแผนภูมิควบคุม DEWMA

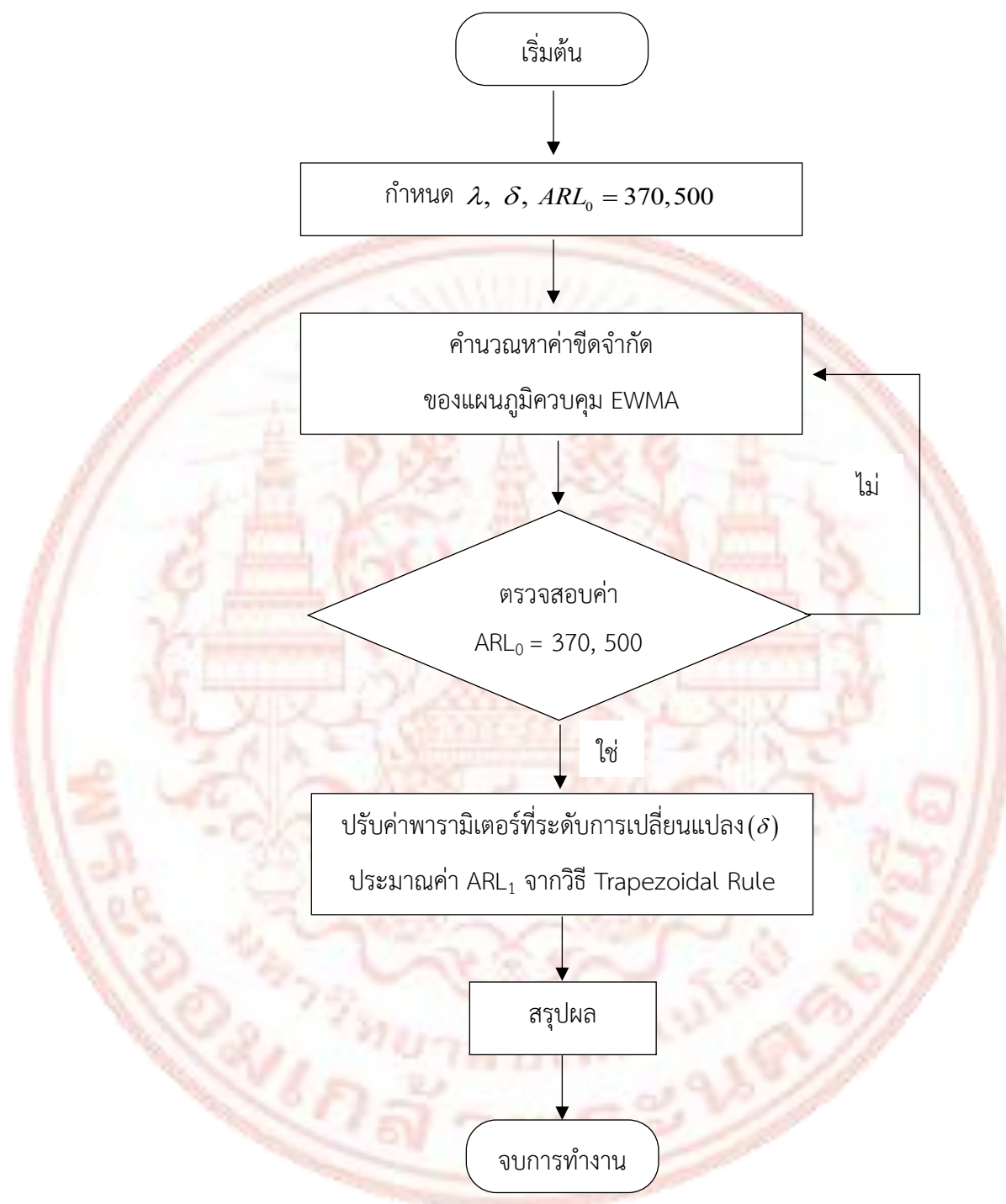
3.4.4 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time)



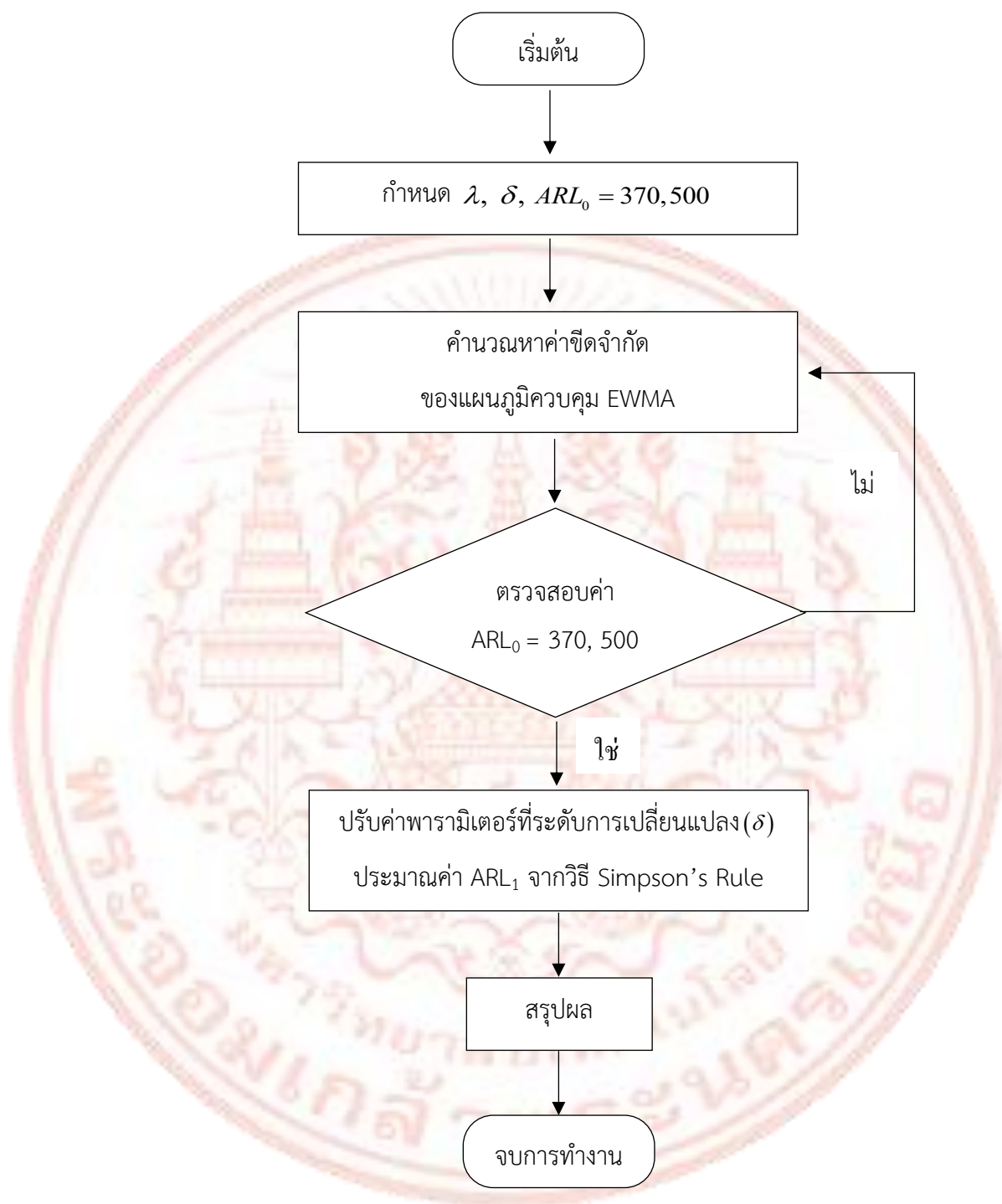
ภาพที่ 3-1 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule Method) ของแผนภูมิควบคุม EWMA



ภาพที่ 3-2 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) ของแผนภูมิควบคุม EWMA



ภาพที่ 3-3 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) ของแผนภูมิควบคุม EWMA



ภาพที่ 3-4 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) ของแผนภูมิควบคุม EWMA

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาเข้ามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1, -0.1$ จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA ที่พารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักต่างกัน โดยกำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ย เมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL₀) เท่ากับ 370 และ 500 โดยใช้โปรแกรม Mathematica® 6.0 มีรายละเอียดดังนี้

4.1. แผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาเข้ามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

4.2. ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

4.1. แผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาเข้ามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

ในส่วนนี้จะนำเสนอผลลัพธ์โดยการแสดงค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาเข้ามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) โดยตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)_s มีรูปสมการดังนี้

$$X_t(1-B^s)^D(1-\phi_1B)(1-\Phi_1B^s) = \mu + \varepsilon_t \quad (4-1)$$

โดยที่	X_t	แทน ค่าสังเกต ณ เวลา t
	s	แทน คาบเวลาของฤดูกาล (Seasonal Periodicity)
	D	แทน พารามิเตอร์ของการทำส่วนต่างแบบเศษส่วนตามฤดูกาลโดยที่ $-0.5 < D < 0.5$
	μ	แทน ค่าคงที่
	ϕ_i	แทน พารามิเตอร์ของการถดถอยในตัวที่ i
	Φ_i	แทน พารามิเตอร์ของการถดถอยในตัวเป็นส่วนของฤดูกาลที่ i

$(1 - B^s)^D$ แทน ตัวดำเนินการผลต่างเศษส่วนที่มีฤดูกาล (seasonal Fractional Difference Operator) อันดับที่ D

B แทน ตัวดำเนินการย้อนกลับ (Backward Shift Operator) โดยที่ $B^s Y_t = Y_{t-s}$

ε_t แทน ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

จากตัวดำเนินการผลต่างเศษส่วน $(1 - B^s)^D$ จากสมการที่ (4-1) สามารถจัดรูปได้ตั้งสมการที่ (4-2) ได้ดังนี้

$$(1 - B^s)^D = 1 - DB^s + \frac{D(D-1)}{2!} B^{2s} - \frac{D(D-1)(D-2)}{3!} B^{3s} + \dots \quad (4-2)$$

รูปแบบทั่วไปตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ เมื่อความคลาดเคลื่อนขาวแบบมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง สามารถแสดงตั้งสมการที่ (4-3) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X_t = & \mu + \varepsilon_t + \left(DX_{t-12} - \frac{D(1-D)}{2!} X_{t-2(12)} + \frac{D(1-D)(2-D)}{3!} X_{t-3(12)} + \dots \right) \\ & + \phi_1 \left(X_{t-1} - DX_{t-12} + \frac{D(1-D)}{2!} X_{t-2(12)} - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!} X_{t-3(12)} - \dots \right) \\ & + \Phi_1 \left(X_{t-12} - DX_{t-12^2} + \frac{D(1-D)}{2!} X_{t-(12+1)12} - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!} X_{t-(12+2)12} - \dots \right) \\ & - \phi_1 \Phi_1 \left(X_{t-(12+1)} - DX_{t-(12+1)12} + \frac{D(1-D)}{2!} X_{t-(12+2)12} - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!} X_{t-(12+3)12} - \dots \right) \end{aligned} \quad (4-3)$$

กำหนดให้ค่าสถิติ EWMA ของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงได้ดังนี้

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t ; t = 1, 2, \dots \quad (4-4)$$

โดยที่ Z_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA ณ คาบเวลาที่ t

X_t แทน ลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂

λ แทน ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยที่ $0 < \lambda \leq 1$

ขีดจำกัดควบคุมบน (Upper Control Limit: UCL) เส้นกึ่งกลาง (Control Limit: CL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower Control Limit: LCL) ของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงตั้งสมการที่ (4-5) ตามลำดับ

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = H_u \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 0 \end{aligned} \quad (4-5)$$

โดยที่ μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแบบที่อยู่ภายใต้การควบคุม

L แทน ค่าพารามิเตอร์ของขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม EWMA

σ แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

λ แทน ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยที่ $0 < \lambda \leq 1$ กำหนดให้ τ_b แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมจะส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม แสดงดังนี้

$$\tau_b = \inf \{t > 0; Z_t \geq H_U\}; H_U \geq u \quad (4-6)$$

โดย H_u แทนขีดจำกัดบนของแผนภูมิควบคุม EWMA

4.2. ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

ในส่วนนี้นำเสนอวิธีการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration) ของค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

กำหนดให้ $L(u)$ แทน ค่าความยาวรันเฉลี่ยสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA นิยามฟังก์ชันเมื่อตัวแบบอยู่ภายใต้การควบคุม แสดงดังสมการที่ (4-7)

$$L(u) = E_\infty(\tau_{H_U}) \quad (4-7)$$

โดยที่ τ_{H_U} คือ Stopping Time และเมื่อตัวแบบออกนอกภายใต้การควบคุม ค่าสถิติ Z_t มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$Z_1 = (1-\lambda)Z_0 + \lambda\varepsilon_1 + k > H_U \text{ หรือ } Z_1 = (1-\lambda)Z_0 + \lambda\varepsilon_1 + k < 0$$

โดยค่า k สามารถหาค่าได้จากสมการที่ (4-8) ดังนี้

$$\begin{aligned} k = & \lambda(\mu + D(x_{t-1} - \phi_1 x_{t-12}) - D(\Phi_1 x_{t-12^2}) - D(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+1)12}) \\ & - \frac{D(1-D)}{2!}(x_{t-12} - \phi_1 x_{t-2(12)}) + \frac{D(1-D)}{2!}(\Phi_1 x_{t-(12+1)12}) - \frac{D(1-D)}{2!}(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+1)12}) \\ & + \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(x_{t-2(12)} - \phi_1 x_{t-3(12)}) + \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(\Phi_1 x_{t-(12+2)12}) \\ & - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}(\phi_1 \Phi_1 x_{t-(12+3)12}) \dots) \end{aligned} \quad (4-8)$$

ในกรณีที่ความยาวรันเฉลี่ยเป็น 1 ถ้า Z_1 อยู่ในขอบเขตการควบคุมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$0 < (1-\lambda)Z_0 + \lambda\varepsilon_1 + k < H_U \quad (4-9)$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยที่ได้มาจากสูตรค่าเฉลี่ย $L(Z_1) = L[(1-\lambda)Z_0 + \lambda\varepsilon_1 + k]$ จะมีค่ามากกว่าค่าสังเกตที่มาจากตัวแบบออกนอกอยู่ภายใต้การควบคุมเมื่อตรวจพบ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (4-10)

$$\frac{-k - (1-\lambda)Z_0}{\lambda} < \varepsilon_1 < \frac{H_U - k - (1-\lambda)Z_0}{\lambda} \quad (4-10)$$

ความน่าจะเป็นที่ ε_1 จะอยู่ในช่วงดังสมการที่ (2-10) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ ε_1 แสดงได้ดังสมการที่ (4-11)

$$P\left(\frac{-k-(1-\lambda)Z_0}{\lambda} < \varepsilon_1 < \frac{H_U - k - (1-\lambda)Z_0}{\lambda}\right) = \int_{\frac{-k-(1-\lambda)Z_0}{\lambda}}^{\frac{H_U - k - (1-\lambda)Z_0}{\lambda}} f(y) dy \quad (4-11)$$

กำหนดให้ $f(y)$ แทน ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

ในปี 1991 Champ และ Rigdon กำหนดค่าเริ่มต้น $E_0 = u$, $Z_0 = v$ และ $y = X_1$ สามารถเขียนสูตรใหม่สำหรับค่า $L(u)$ ได้ดังสมการที่ (4-12)

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 - P\left[\frac{-(1-\lambda)-k}{\lambda} < \varepsilon_1 < \frac{H_U - (1-\lambda) - k}{\lambda}\right] \\ &\quad + \int_{\frac{-(1-\lambda)-k}{\lambda}}^{\frac{H_U - (1-\lambda) - k}{\lambda}} 1 + L((1-\lambda)u + \lambda y + k) dy \\ L(u) &= 1 + \int_{\frac{-(1-\lambda)-k}{\lambda}}^{\frac{H_U - (1-\lambda) - k}{\lambda}} L((1-\lambda)u + \lambda y + k) f(y) dy \end{aligned} \quad (4-12)$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{H_U} L(y) f\left(\frac{y - (1-\lambda)u - k}{\lambda}\right) dy \quad (4-13)$$

ในงานวิจัยนี้พิจารณาในกรณีทางเดียวด้านบนสำหรับตัวแปรสุ่มเชิงบวก $E_i \geq 0$ สำหรับกรณีเชิงบวก สมมติว่า $H_U = b$ จะได้

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^b L(y) f\left(\frac{y - (1-\lambda)u - k}{\lambda}\right) dy \quad (4-14)$$

โดยทั่วไป สมการที่ (4-9) และสมการที่ (4-10) ไม่สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวิเคราะห์สำหรับค่า $L(u)$ ได้ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมในการประมาณเชิงตัวเลขโดยผลรวมจำกัด กำหนดเซตของจุด $\{a_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ บนช่วง $[0, H_U]$ และเซตของค่าคงที่แบบถ่วงน้ำหนัก $\{w_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ สามารถประมาณค่าการอินทิเกรตให้อยู่ในรูปดังสมการที่ (4-15)

$$\int_0^b W(y) F(y) dy \approx \sum_{j=1}^m w_j F(a_j) \quad (4-15)$$

จากสมการที่ (2-14) สามารถประมาณค่า $\tilde{L}(u)$ ด้วยวิธีสมการพีชคณิตเชิงเส้นได้สมการที่ (4-16)

$$\tilde{L}(a_i) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j \tilde{L}(a_j) f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)a_i - k}{\lambda} \right]; i = 1, 2, \dots, m \quad (4-16)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \tilde{L}(a_1) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j \tilde{L}(a_j) f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)a_1 - k}{\lambda} \right] \\ \tilde{L}(a_2) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j \tilde{L}(a_j) f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)a_2 - k}{\lambda} \right] \\ &\vdots \\ \tilde{L}(a_m) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j \tilde{L}(a_j) f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)a_m - k}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (4-17)$$

เซตของ m สมการไม่ทราบค่าแต่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ โดยกำหนดเวกเตอร์คอลัมน์ L และเมตริกซ์ R มิติ $m \times m$ ดังสมการที่ (4-18) ดังนี้

$$L_{m \times 1} = \begin{pmatrix} \tilde{L}(a_1) \\ \tilde{L}(a_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(a_m) \end{pmatrix}, \quad 1_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad R_{m \times m} = \frac{1}{\lambda} w_j f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)a_i - k}{\lambda} \right] \quad (4-18)$$

สมการพีชคณิตเชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$L = 1 + RL \quad (4-19)$$

สามารถแก้สมการหาค่าเวกเตอร์ L ได้ดังนี้

$$L = (I - R)^{-1} 1 \quad (4-20)$$

เมื่อ I_m คือเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติเป็น $m \times 1$

สมการนี้สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายเวกเตอร์ L ดังนั้น $\tilde{L}(a_j) = L_j$

หลังจากเปลี่ยนค่าของ $\tilde{L}(a_j) = L_j$ ในสมการ (4-12) จากนั้นแทนค่า a_i ด้วย u จะได้ดังสมการที่ (4-21)

$$\tilde{L}(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j \tilde{L}(a_j) f \left[\frac{a_j - (1-\lambda)u - k}{\lambda} \right]; i = 1, 2, \dots, m \quad (4-21)$$

เมื่อที่ $a_j = w_j \left(j - \frac{1}{2} \right)$ และ $w_j = \frac{h}{m}; j = 1, 2, \dots, m$

4.3 วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $H_L = a = 0$ และ $H_U = b$ ค่าสถิติ EWMA อยู่ในช่วง $0 \leq E_t \leq b$ สำหรับตัวแบบที่อยู่ภายใต้การควบคุม และ $E_t > b$ สำหรับตัวแบบออกนอกภายใต้การควบคุม สามารถเขียนสมการปริพันธ์ แสดงดังสมการที่ (4-22)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^b L(y) f\left[\frac{y - (1-\lambda)u - k}{\lambda}\right] dy ; i = 1, 2, \dots, m \quad (4-22)$$

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) ทั้ง 4 วิธีดังนี้

4.3.1 วิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule Method)

จากสมการที่ (4-21) กำหนดให้

$$f(A_j) = f\left(\frac{a_j - (1-\lambda)u - k}{\lambda}\right) \quad (4-23)$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ ในช่วง $[0, b]$ แสดงดังสมการที่ (4-24)

$$\int_0^b W(y) f(y) dy \approx \sum_{j=1}^m w_j f(a_j) ; j = 1, 2, \dots, m \quad (4-24)$$

โดยที่ $W(y) = 1, -1 < y < 1$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎเกาส์ แสดงดังสมการที่ (2-25) โดย $\tilde{L}_G(u)$ แทนค่าความยวมนั้นเฉลี่ยที่หาได้จากวิธีกฎของเกาส์

$$\tilde{L}_G(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (4-25)$$

โดยที่ $a_j = w_j \left(j - \frac{1}{2}\right)$ และ $w_j = \frac{b}{m}; j = 1, 2, \dots, m$

4.3.2 วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method)

กำหนดให้ $y = f(y)$ ในช่วง $[0, b]$ แบ่งออกเป็น m ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง

$h = \frac{b}{m}$ ด้วยกฎของค่ากลาง ที่มีการแบ่งช่วงเป็น m ช่วง แสดงดังสมการที่ (4-26)

$$M(f, h) = h \sum_{j=1}^m f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h\right] ; j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4-26)$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ มีรูปแบบดังนี้ $\int_a^b f(y)dy \approx M(f, h)$ สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของค่ากลาง แสดงดังสมการ (2-16) โดย $\tilde{L}_M(u)$ แทน ค่าความยวมนั้นเฉลี่ยที่หาได้จากวิธีกฎของค่ากลาง

$$\tilde{L}_M(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (4-27)$$

โดยที่ $a_j = w_j \left(j - \frac{1}{2} \right)$ และ $w_j = \frac{b}{m}; j = 1, 2, \dots, m$

4.3.3 วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method)

กำหนดให้ $y = f(y)$ ในช่วง $[0, b]$ แบ่งออกเป็น m ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง $h = \frac{b}{m}$ ด้วยกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีการแบ่งช่วงเป็น m ช่วง แสดงดังสมการที่ (4-28)

$$T(f, h) = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + h \sum_{j=1}^m f(y_j) ; j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4-28)$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ มีรูปแบบดังนี้ $\int_a^b f(y)dy \approx T(f, h)$ สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู แสดงดังสมการ (4-29)

$$\tilde{L}_T(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (4-29)$$

โดยที่ $a_j = w_j j$ และ $w_j = \frac{b}{m}; j = 1, 2, \dots, m-1$ ในกรณีอื่น $w_j = \frac{b}{2m}$

4.3.4 วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

กำหนดให้ $y = f(y)$ ในช่วง $[0, b]$ แบ่งออกเป็น $2m$ ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง $h = \frac{b}{2m}$ ด้วยกฎของซิมป์สัน ที่มีการแบ่งช่วงเป็น $2m$ ช่วง แสดงดังสมการที่ (4-30)

$$S(f, h) = \frac{h}{3} [f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{j=1}^m f(y_{2j}) + \frac{4h}{3} \sum_{j=1}^m f(y_{2j-1}) ; j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4-30)$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(y)$ มีรูปแบบดังนี้ $\int_a^b f(y)dy \approx S(f,h)$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของซิมป์สัน แสดงดังสมการ (4-31)

$$\tilde{L}_S(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (4-31)$$

โดยที่ $a_j = w_j j$, $w_j = \frac{4}{3} \left(\frac{b}{2m} \right)$; $j = 1, 3, \dots, 2m-1$ และ

$w_j = \frac{2}{3} \left(\frac{b}{2m} \right)$; $j = 2, 4, \dots, 2m-2$ ในกรณีอื่น $w_j = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2m} \right)$

4.4 ข้อมูลจำลอง (Simulation)

ตารางที่ 4-1 ถึง 4-12 แสดงการประมาณค่า ARL_1 บนแผนภูมิควบคุม EWMA โดยใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยค่าสังเกตคือตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาวมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธีที่ทดสอบที่ $m = 500$ ซึ่งค่า ARL_1 ถูกคำนวณสำหรับช่วงของค่าพารามิเตอร์ที่ไม่อยู่ภายใต้การควบคุม คือ $\alpha_1 = \alpha_0(1 + \delta)$ ด้วยขนาดการเปลี่ยนแปลง (δ) เท่ากับ 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 1 ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้ค่าสังเกตคือตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อ $D = 0.1, 0.2$ และ 0.4 ตามลำดับ ผลลัพธ์ของค่า ARL แสดงความแตกต่างระหว่าง 4 วิธีที่กำหนดโดยค่าอ้างอิง (α) เท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15 เมื่อ ARL_0 เท่ากับ 370 และ 500

ได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 4-1 ถึง 4-12 โดยให้

- M. แทน วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method)
- T. แทน วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method)
- G. แทน วิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule Method)
- S. แทน วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method)

ตารางที่ 4-1 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001020803$				$b = 0.00433641$				$b = 0.0940129$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.658 (1.250)	303.658 (1.422)	303.658 (7.250)	303.658 (4.984)	335.030 (1.327)	335.030 (1.421)	335.030 (7.702)	335.030 (4.992)	341.761 (1.265)	341.761 (1.407)	341.761 (7.812)	341.761 (4.780)
0.03	206.917 (1.280)	206.917 (1.483)	206.917 (8.250)	206.917 (5.109)	276.232 (1.312)	276.232 (1.406)	276.232 (7.624)	276.232 (5.344)	293.075 (1.218)	293.075 (1.328)	293.075 (7.938)	293.075 (4.718)
0.05	143.116 (1.280)	143.116 (1.438)	143.116 (7.781)	143.116 (5.046)	229.379 (1.421)	229.379 (1.266)	229.379 (8.313)	229.379 (5.577)	252.939 (1.172)	252.939 (1.218)	252.939 (8.438)	252.939 (5.000)
0.07	100.417 (1.468)	100.417 (1.390)	100.417 (7.359)	100.417 (5.343)	191.760 (1.422)	191.760 (1.375)	191.760 (8.469)	191.760 (5.140)	219.607 (1.407)	219.607 (1.234)	219.607 (7.546)	219.607 (5.500)
0.1	60.5651 (1.485)	60.5651 (1.531)	60.5651 (7.953)	60.5651 (5.390)	148.330 (1.360)	148.330 (1.296)	148.330 (8.437)	148.330 (5.218)	179.508 (1.078)	179.508 (1.422)	179.508 (7.749)	179.508 (4.734)
0.3	4.52865 (1.390)	4.52865 (1.468)	4.52865 (7.672)	4.52865 (5.375)	36.1574 (1.328)	36.1574 (1.499)	36.1574 (8.219)	36.1574 (5.359)	60.0633 (1.312)	60.0633 (1.173)	60.0633 (8.047)	60.0633 (4.096)
0.5	1.43509 (1.422)	1.43509 (1.425)	1.43509 (7.766)	1.43509 (5.110)	13.4037 (1.343)	13.4037 (1.437)	13.4037 (8.234)	13.4037 (5.453)	27.1875 (1.158)	27.1875 (1.407)	27.1875 (8.172)	27.1875 (5.093)
0.7	1.08642 (1.437)	1.08642 (1.407)	1.08642 (7.468)	1.08642 (5.359)	6.22587 (1.187)	6.22587 (1.359)	6.22587 (8.749)	6.22587 (5.265)	14.9549 (1.094)	14.9549 (1.094)	14.9549 (7.859)	14.9549 (5.062)
1	1.01372 (1.375)	1.01372 (1.468)	1.01372 (7.781)	1.01372 (5.156)	2.99901 (1.453)	2.99901 (1.390)	2.99901 (7.921)	2.99901 (5.453)	7.77469 (1.328)	7.77469 (1.515)	7.77469 (8.261)	7.77469 (4.889)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-2 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001017617$				$b = 0.0043088$				$b = 0.0929991$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.649 (1.156)	303.649 (1.297)	303.649 (8.281)	303.649 (5.156)	335.008 (1.343)	335.008 (1.375)	335.008 (7.281)	335.008 (5.156)	341.680 (1.515)	341.680 (1.594)	341.680 (8.093)	341.680 (5.422)
0.03	206.898 (1.363)	206.898 (1.281)	206.898 (7.983)	206.898 (4.813)	276.178 (1.391)	276.178 (1.252)	276.178 (8.453)	276.178 (5.531)	292.878 (1.515)	292.878 (1.484)	292.878 (7.884)	292.878 (5.188)
0.05	143.095 (1.339)	143.095 (1.406)	143.095 (7.532)	143.095 (5.266)	229.306 (1.156)	229.306 (1.234)	229.306 (8.030)	229.306 (5.031)	252.668 (1.468)	252.668 (1.484)	252.668 (7.593)	252.668 (4.843)
0.07	100.397 (1.344)	100.397 (1.406)	100.397 (8.359)	100.397 (4.645)	191.677 (1.201)	191.677 (1.374)	191.677 (7.781)	191.677 (4.858)	219.292 (1.547)	219.292 (1.641)	219.292 (7.703)	219.292 (4.937)
0.1	60.5483 (1.155)	60.5483 (1.359)	60.5483 (8.171)	60.5483 (5.032)	148.241 (1.375)	148.241 (1.343)	148.241 (8.140)	148.241 (4.999)	179.163 (1.485)	179.163 (1.515)	179.163 (7.812)	179.163 (4.687)
0.3	4.52611 (1.155)	4.52611 (1.281)	4.52611 (7.781)	4.52611 (6.062)	36.1038 (1.219)	36.1038 (1.438)	36.1038 (7.844)	36.1038 (4.874)	58.8159 (1.516)	58.8159 (1.437)	58.8159 (7.838)	58.8159 (4.843)
0.5	1.43464 (1.312)	1.43464 (1.297)	1.43464 (8.312)	1.43464 (6.156)	13.0174 (1.078)	13.0174 (1.296)	13.0174 (8.016)	13.0174 (4.624)	27.0439 (1.453)	27.0439 (1.545)	27.0439 (7.728)	27.0439 (5.297)
0.7	1.08631 (1.298)	1.08631 (1.391)	1.08631 (7.782)	1.08631 (6.031)	6.21178 (1.124)	6.21178 (1.522)	6.21178 (7.844)	6.21178 (4.968)	14.8665 (1.485)	14.8665 (1.555)	14.8665 (8.515)	14.8665 (5.406)
1	1.0137 (1.156)	1.0137 (1.359)	1.0137 (7.984)	1.0137 (4.953)	2.9925 (1.253)	2.9925 (1.531)	2.9925 (7.984)	2.9925 (5.125)	7.72559 (1.512)	7.72559 (1.515)	7.72559 (7.829)	7.72559 (5.343)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-3 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.000000101085$				$b = 0.00425051$				$b = 0.0908774$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.629 (1.219)	303.629 (1.328)	303.629 (7.891)	303.629 (5.328)	334.961 (1.266)	334.961 (1.328)	334.961 (7.156)	334.961 (5.359)	341.510 (1.281)	341.510 (1.437)	341.510 (7.000)	341.510 (4.985)
0.03	206.858 (1.125)	206.858 (1.266)	206.858 (7.718)	206.858 (5.547)	276.065 (1.187)	276.065 (1.328)	276.065 (7.438)	276.065 (5.250)	292.461 (1.250)	292.461 (1.375)	292.461 (7.094)	292.461 (4.797)
0.05	143.050 (1.031)	143.050 (1.234)	143.050 (7.766)	143.050 (5.953)	229.152 (1.296)	229.152 (1.250)	229.152 (7.687)	229.152 (5.375)	252.095 (1.219)	252.095 (1.187)	252.095 (7.437)	252.095 (4.906)
0.07	100.354 (1.437)	100.354 (1.266)	100.354 (7.531)	100.354 (4.938)	191.501 (1.359)	191.501 (1.281)	191.501 (7.063)	191.501 (5.297)	218.625 (1.250)	218.625 (1.266)	218.625 (7.844)	218.625 (5.266)
0.1	60.5122 (1.172)	60.5122 (1.454)	60.5122 (7.797)	60.5122 (4.953)	148.052 (1.313)	148.052 (1.344)	148.052 (7.422)	148.052 (5.438)	178.432 (1.250)	178.432 (1.297)	178.432 (7.656)	178.432 (5.438)
0.3	4.52086 (1.219)	4.52086 (1.375)	4.52086 (7.313)	4.52086 (5.000)	35.9899 (1.343)	35.9899 (1.390)	35.9899 (7.656)	35.9899 (5.156)	59.2946 (1.359)	59.2946 (1.312)	59.2946 (7.969)	59.2946 (5.531)
0.5	1.43368 (1.141)	1.43368 (1.391)	1.43368 (7.641)	1.43368 (5.218)	12.9613 (1.265)	12.9613 (1.297)	12.9613 (7.594)	12.9613 (5.219)	26.7419 (1.266)	26.7419 (1.391)	26.7419 (7.641)	26.7419 (5.766)
0.7	1.08607 (1.187)	1.08607 (1.250)	1.08607 (7.469)	1.08607 (5.234)	6.18189 (1.266)	6.18189 (1.531)	6.18189 (7.063)	6.18189 (5.469)	14.6808 (1.156)	14.6808 (1.312)	14.6808 (7.922)	14.6808 (5.375)
1	1.01366 (1.203)	1.01366 (1.266)	1.01366 (7.671)	1.01366 (5.281)	2.97868 (1.250)	2.97868 (1.234)	2.97868 (7.857)	2.97868 (5.343)	7.62345 (1.031)	7.62345 (1.422)	7.62345 (7.203)	7.62345 (5.312)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

จากตารางที่ (4-1) จากผลการวิจัยเปรียบเทียบเทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธี ได้แก่ กฎของค่ากลาง กฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน และกฎของเกาส์ บนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ โดยกำหนดให้ $ARL_0 = 370$ จากข้อมูลจำลองพบว่าผลลัพธ์ ARL_1 ที่ได้จากสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธีให้ค่าไม่แตกต่างกันในทุกพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) และทุกตัวแบบที่ศึกษาหากพิจารณาผลลัพธ์ ARL_1 เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและให้ผลเช่นเดียวกันทั้ง 4 วิธี โดยผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุด รองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา เมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผล พบว่าวิธีกฎของค่ากลางใช้เวลาในการประมวลผลน้อยสุดโดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ขณะที่วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่า โดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 5-6 วินาที และ 7-10 วินาที ตามลำดับซึ่งผลนี้เกิดขึ้นในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและทุกตัวแบบที่ศึกษาจากผลดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่าวิธีกฎของค่ากลางมีความเหมาะสมที่สุดสำหรับการนำไปใช้ในการประเมินประสิทธิภาพ

ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

หากพิจารณาทั้งผลลัพธ์ ARL_1 และ CPU Time. จะพบว่าวิธีการของค่ากลางเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดรองลงมาเป็นวิธีการของสี่เหลี่ยมคางหมู, วิธีการของซิมป์สันและวิธีการของเกาส์ ตามลำดับโดยพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับได้ดีที่สุดสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ ในครั้งนี้คือ $\lambda = 0.05$ โดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสอดคล้องกันทั้งในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂ และ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ (4-2) และตารางที่ (4-3)

ตารางที่ 4-4 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001380436$				$b = 0.005814078$				$b = 0.10586795$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.285 (1.407)	410.285 (1.343)	410.285 (7.813)	410.285 (5.547)	452.667 (1.375)	452.667 (1.297)	452.667 (8.109)	452.667 (5.062)	459.161 (1.359)	459.161 (1.421)	459.161 (7.687)	459.161 (5.188)
0.03	279.462 (1.531)	279.462 (1.296)	279.462 (8.078)	279.462 (5.031)	373.092 (1.484)	373.092 (1.202)	373.092 (8.547)	373.092 (4.531)	389.569 (1.281)	389.569 (1.390)	389.569 (6.968)	389.569 (5.734)
0.05	193.184 (1.328)	193.184 (1.452)	193.184 (7.703)	193.184 (5.453)	309.694 (1.453)	309.694 (1.437)	309.694 (7.765)	309.694 (5.234)	333.017 (1.439)	333.017 (1.406)	333.017 (7.937)	333.017 (5.187)
0.07	135.442 (1.344)	135.442 (1.407)	135.442 (8.250)	135.442 (5.123)	258.802 (1.297)	258.802 (1.437)	258.802 (7.390)	258.802 (5.203)	286.647 (1.328)	286.647 (1.297)	286.647 (7.985)	286.647 (5.093)
0.1	81.5502 (1.359)	81.5502 (1.422)	81.5502 (8.109)	81.5502 (5.047)	200.059 (1.265)	200.059 (1.390)	200.059 (7.938)	200.059 (5.281)	231.636 (1.155)	231.636 (1.375)	231.636 (7.406)	231.636 (5.249)
0.3	5.77181 (1.343)	5.77181 (1.344)	5.77181 (8.203)	5.77181 (5.047)	48.4389 (1.297)	48.4389 (1.500)	48.4389 (8.531)	48.4389 (5.093)	73.7791 (1.156)	73.7791 (1.171)	73.7791 (7.515)	73.7791 (5.251)
0.5	1.58838 (1.437)	1.58838 (1.439)	1.58838 (8.235)	1.58838 (5.312)	17.2358 (1.281)	17.2358 (1.328)	17.2358 (8.250)	17.2358 (5.015)	32.5024 (1.265)	32.5024 (1.391)	32.5024 (8.110)	32.5024 (5.202)
0.7	1.11687 (1.438)	1.11687 (1.453)	1.11687 (8.016)	1.11687 (5.437)	8.03995 (1.234)	8.03995 (1.390)	8.03995 (7.765)	8.03995 (5.546)	17.5479 (1.358)	17.5479 (1.453)	17.5479 (8.903)	17.5479 (4.969)
1	1.01856 (1.360)	1.01856 (1.515)	1.01856 (7.719)	1.01856 (4.986)	3.69088 (1.438)	3.69088 (1.483)	3.69088 (8.391)	3.69088 (5.296)	8.92888 (1.062)	8.92888 (1.296)	8.92888 (8.203)	8.92888 (5.125)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-5 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001376127$				$b = 0.00577681$				$b = 0.10473158$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.273 (1.547)	410.273 (1.172)	410.273 (8.109)	410.273 (4.937)	452.636 (1.000)	452.636 (1.141)	452.636 (7.422)	452.636 (4.765)	459.034 (1.281)	459.034 (1.406)	459.034 (8.062)	459.034 (4.516)
0.03	279.437 (1.284)	279.437 (1.396)	279.437 (8.218)	279.437 (5.218)	373.018 (1.155)	373.018 (1.218)	373.018 (7.765)	373.018 (5.281)	389.264 (1.172)	389.264 (1.312)	389.264 (7.812)	389.264 (4.797)
0.05	193.156 (1.425)	193.156 (1.484)	193.156 (7.437)	193.156 (5.297)	309.594 (1.203)	309.594 (1.250)	309.594 (7.843)	309.594 (5.297)	332.605 (1.328)	332.605 (1.390)	332.605 (7.750)	332.605 (4.735)
0.07	135.145 (1.269)	135.145 (1.171)	135.145 (7.953)	135.145 (5.047)	258.687 (1.124)	258.687 (1.249)	258.687 (7.734)	258.687 (5.172)	286.176 (1.109)	286.176 (1.235)	286.176 (7.874)	286.176 (5.109)
0.1	81.5274 (1.184)	81.5274 (1.281)	81.5274 (7.906)	81.5274 (5.265)	199.937 (1.296)	199.937 (1.375)	199.937 (7.750)	199.937 (5.531)	231.129 (1.187)	231.129 (1.281)	231.129 (7.718)	231.129 (4.937)
0.3	5.76837 (1.111)	5.76837 (1.543)	5.76837 (8.000)	5.76837 (5.531)	48.3654 (1.313)	48.3654 (1.327)	48.3654 (8.187)	48.3654 (4.954)	73.4487 (1.284)	73.4487 (1.141)	73.4487 (7.859)	73.4487 (4.484)
0.5	1.58777 (1.269)	1.58777 (1.405)	1.58777 (7.765)	1.58777 (4.750)	17.1997 (1.109)	17.1997 (1.281)	17.1997 (8.187)	17.1997 (5.547)	32.3195 (1.328)	32.3195 (1.312)	32.3195 (7.822)	32.3195 (4.703)
0.7	1.11672 (1.532)	1.11672 (1.343)	1.11672 (7.922)	1.11672 (4.844)	8.02069 (1.266)	8.02069 (1.140)	8.02069 (7.859)	8.02069 (4.984)	17.4385 (1.016)	17.4385 (1.204)	17.4385 (8.016)	17.4385 (4.405)
1	1.01853 (1.326)	1.01853 (1.406)	1.01853 (8.109)	1.01853 (5.047)	3.68199 (1.062)	3.68199 (1.202)	3.68199 (7.938)	3.68199 (5.249)	8.74689 (1.281)	8.74689 (1.468)	8.74689 (7.218)	8.74689 (4.907)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-6 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

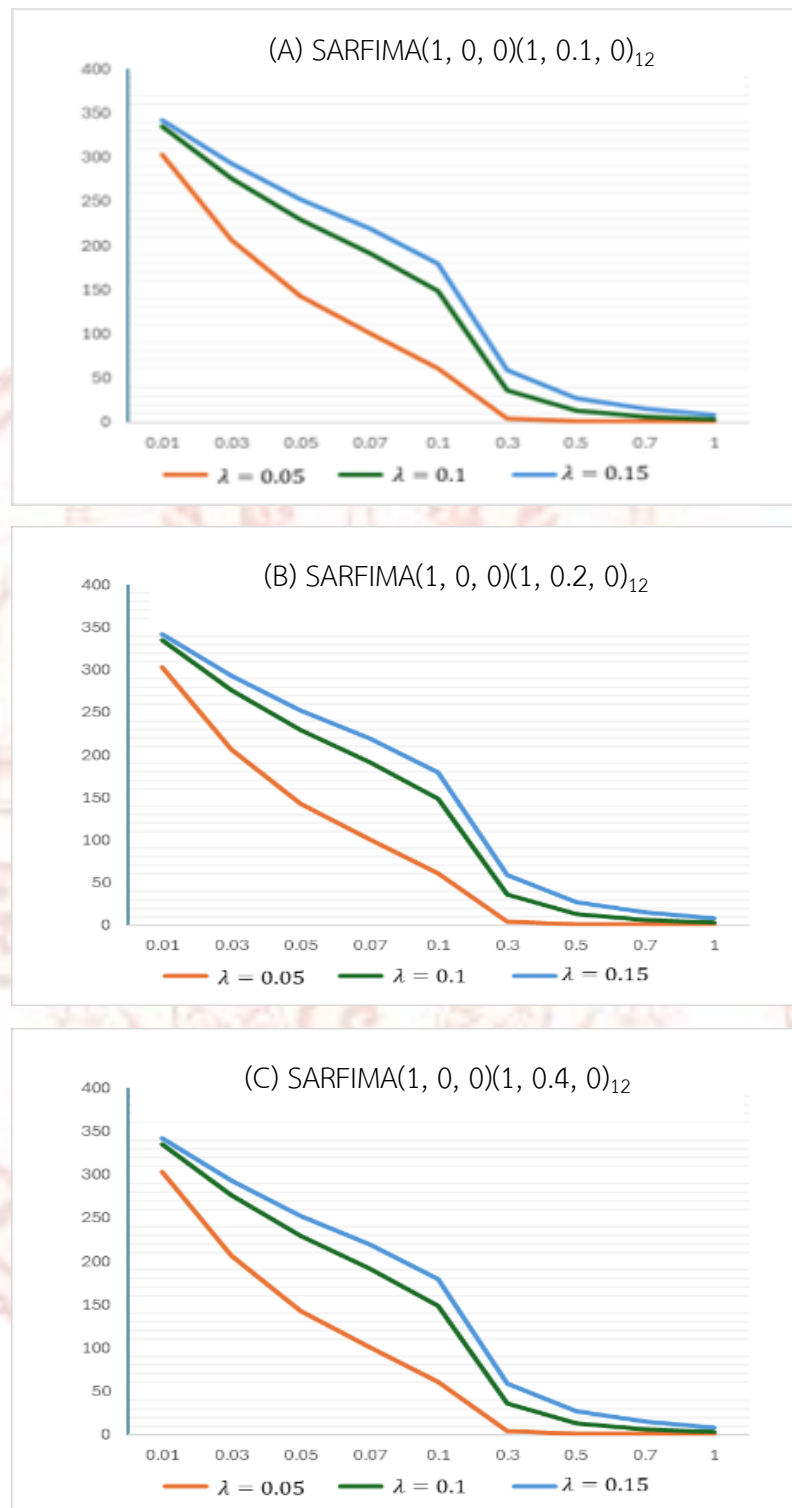
δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001366975$				$b = 0.005698128$				$b = 0.1023528$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.246 (1.312)	410.246 (1.234)	410.246 (7.406)	410.246 (5.250)	452.571 (1.281)	452.571 (1.156)	452.571 (6.906)	452.571 (5.281)	458.764 (1.047)	458.764 (1.141)	458.764 (7.406)	458.764 (5.281)
0.03	279.383 (1.328)	279.383 (1.376)	279.383 (7.343)	279.383 (5.063)	372.860 (1.265)	372.860 (1.328)	372.860 (6.938)	372.860 (4.610)	388.161 (1.218)	388.161 (1.172)	388.161 (7.266)	388.161 (4.610)
0.05	193.095 (1.219)	193.095 (1.234)	193.095 (7.656)	193.095 (5.234)	309.381 (1.047)	309.381 (1.359)	309.381 (6.875)	309.381 (4.765)	331.731 (1.235)	331.731 (1.312)	331.731 (7.531)	331.731 (4.765)
0.07	135.356 (1.297)	135.356 (1.218)	135.356 (7.235)	135.356 (5.156)	258.443 (1.375)	258.443 (1.110)	258.443 (7.078)	258.443 (4.922)	285.177 (1.266)	285.177 (1.250)	285.177 (7.391)	285.177 (4.922)
0.1	81.4785 (1.250)	81.4875 (1.219)	81.4785 (7.782)	81.4785 (5.172)	199.675 (1.391)	199.675 (1.281)	199.675 (7.157)	199.675 (5.000)	230.059 (1.141)	230.059 (1.250)	230.059 (7.781)	230.059 (5.000)
0.3	5.76103 (1.266)	5.76103 (1.297)	5.76103 (7.656)	5.76103 (4.922)	48.2088 (1.219)	48.2088 (1.313)	48.2088 (7.360)	48.2088 (4.922)	72.7534 (1.140)	72.7534 (1.203)	72.7534 (7.813)	72.7534 (4.922)
0.5	1.58646 (1.172)	1.58646 (1.250)	1.58646 (7.937)	1.58646 (5.023)	17.1229 (1.297)	17.1229 (1.359)	17.1229 (7.640)	17.1229 (4.750)	31.9353 (1.203)	31.9353 (1.156)	31.9353 (7.577)	31.9353 (4.750)
0.7	1.1164 (1.157)	1.1164 (1.281)	1.1164 (7.453)	1.1164 (5.265)	7.97979 (1.282)	7.97979 (1.422)	7.97979 (7.438)	7.97979 (4.391)	17.2087 (1.141)	17.2087 (1.375)	17.2087 (7.828)	17.2087 (4.391)
1	1.01847 (1.187)	1.01847 (1.234)	1.01847 (7.422)	1.01847 (5.313)	3.66313 (1.250)	3.66313 (1.297)	3.66313 (7.671)	3.66313 (4.625)	8.74689 (1.172)	8.74689 (1.281)	8.74689 (7.766)	8.74689 (4.625)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

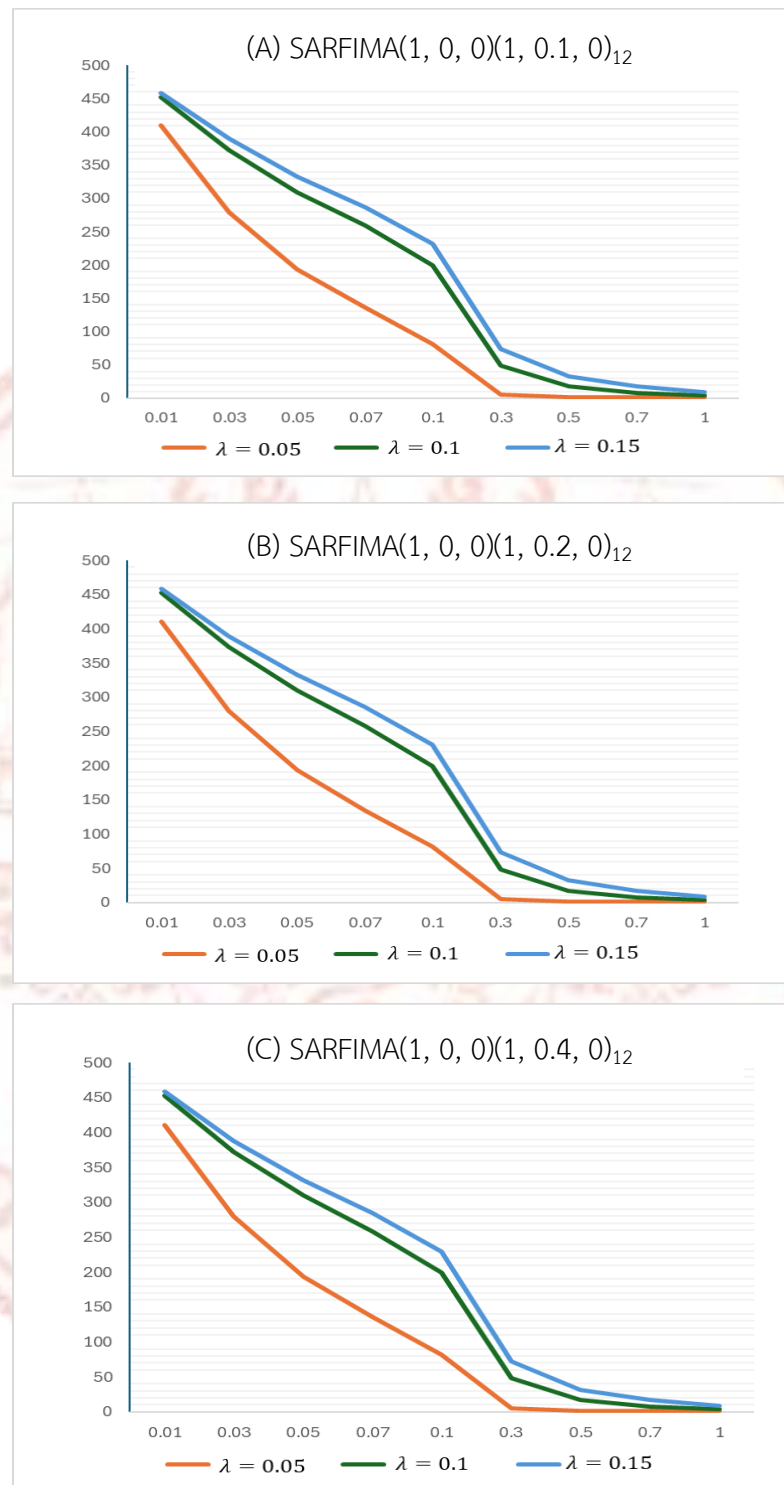
** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

จากตารางที่ (4-4) จากผลการวิจัยเปรียบเทียบเทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธี ได้แก่ กฎของค่ากลาง กฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน และกฎของเกาส์ บนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ โดยกำหนดให้ $ARL_0 = 500$ จากข้อมูลจำลองพบว่าผลลัพธ์ ARL_1 ที่ได้จากสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธีให้ค่าไม่แตกต่างกันในทุกพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) และทุกตัวแบบที่ศึกษาหากพิจารณาผลลัพธ์ ARL_1 เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและให้ผลเช่นเดียวกันทั้ง 4 วิธี โดยผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุด รองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา เมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผล พบว่าวิธีกฎของค่ากลางใช้เวลาในการประมวลผลน้อยสุดโดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ขณะที่วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่า โดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 5-6 วินาที และ 7-10 วินาที ตามลำดับซึ่งผลนี้เกิดขึ้นในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและทุกตัวแบบที่ศึกษาจากผลดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่าวิธีกฎของค่ากลางมีความเหมาะสมที่สุดสำหรับการนำไปใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

หากพิจารณาทั้งผลลัพธ์ ARL_1 และ CPU Time. จะพบว่าวิธีกฎของค่ากลางเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดรองลงมาคือวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู, วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ ตามลำดับโดยพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับได้ดีที่สุดสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ ในครั้งนี้คือ $\lambda = 0.05$ โดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสอดคล้องกันทั้งในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂ และ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ (4-5) และตารางที่ (4-6)



ภาพที่ 4-1 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีหาค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ
 ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$



ภาพที่ 4-2 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีหาค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ
 ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$

จากภาพที่ 4-1 แสดงให้เห็นว่า ARL_1 ที่ได้จากวิธีของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ของแผนภูมิควบคุมเท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15 ภายใต้ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = 0.1$ ซึ่งแสดงในรูปย่อย (a) - (c) พบว่าผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุด รองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา ต่อมาเมื่อพิจารณาระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและทุกตัวแบบที่ศึกษา และมีแนวโน้มลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบขนาดเล็ก ($0.01 \leq \delta < 0.5$) ซึ่งแสดงในรูปย่อย (a) - (c) และจากภาพที่ 4-2 ซึ่งพิจารณาจากกรณีที่ $ARL_0 = 500$ ก็ยังคงให้ผลสอดคล้องกัน

ตารางที่ 4-7 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001028953$				$b = 0.00440742$				$b = 0.0966467$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.682 (1.112)	303.682 (1.294)	303.682 (7.606)	303.682 (5.257)	335.086 (1.021)	335.086 (1.196)	335.086 (8.000)	335.086 (5.266)	341.965 (1.007)	341.965 (1.191)	341.965 (7.496)	341.965 (5.000)
0.03	206.965 (1.108)	206.965 (1.543)	206.965 (7.142)	206.965 (5.003)	276.368 (1.205)	276.368 (1.128)	276.368 (7.638)	276.368 (5.210)	293.578 (1.108)	293.578 (1.372)	293.578 (7.166)	293.578 (4.908)
0.05	143.170 (1.419)	143.170 (1.134)	143.170 (7.907)	143.170 (5.212)	229.563 (1.040)	229.563 (1.399)	229.563 (6.415)	229.563 (5.002)	253.631 (1.135)	253.631 (1.222)	253.631 (7.501)	253.631 (5.165)
0.07	100.469 (1.269)	100.469 (1.232)	100.469 (7.205)	100.469 (5.108)	191.972 (1.375)	191.972 (1.110)	191.972 (7.103)	191.972 (5.222)	220.413 (1.166)	220.413 (1.322)	220.413 (7.348)	220.413 (5.134)
0.1	60.6082 (1.467)	60.6082 (1.209)	60.6082 (7.008)	60.6082 (5.179)	148.557 (1.191)	148.557 (1.289)	148.557 (8.177)	148.557 (5.700)	180.395 (1.291)	180.395 (1.111)	180.395 (8.000)	180.395 (5.002)
0.3	4.53513 (1.116)	4.53513 (1.291)	4.53513 (7.605)	4.53513 (4.822)	36.2939 (1.209)	36.2939 (1.713)	36.2939 (8.367)	36.2939 (5.922)	60.7012 (1.148)	60.7012 (1.207)	60.7012 (8.113)	60.7012 (5.000)
0.5	1.43625 (1.232)	1.43625 (1.250)	1.43625 (7.897)	1.43625 (5.090)	13.1111 (1.097)	13.1111 (1.300)	13.1111 (7.942)	13.1111 (5.751)	27.5586 (1.123)	27.5586 (1.211)	27.5586 (7.800)	27.5586 (4.731)
0.7	1.0867 (1.187)	1.0867 (1.189)	1.0867 (7.632)	1.0867 (5.000)	6.26185 (1.482)	6.26185 (1.400)	6.26185 (7.908)	6.26185 (5.891)	15.1837 (1.141)	15.1837 (1.375)	15.1837 (7.666)	15.1837 (4.521)
1	1.01378 (1.150)	1.01378 (1.235)	1.01378 (8.122)	1.01378 (5.676)	3.01567 (1.250)	3.01567 (1.255)	3.01567 (7.691)	3.01567 (5.605)	7.90037 (1.172)	7.90037 (1.281)	7.90037 (8.066)	7.90037 (5.025)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-8 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001024675$				$b = 0.00437006$				$b = 0.0952562$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.669 (1.022)	303.669 (1.123)	303.669 (7.103)	303.669 (5.290)	335.057 (1.211)	335.057 (1.235)	335.057 (8.000)	335.057 (5.000)	341.858 (1.222)	341.858 (1.191)	341.858 (8.000)	341.858 (5.008)
0.03	206.940 (1.268)	206.940 (1.116)	206.940 (7.776)	206.940 (5.000)	276.297 (1.168)	276.297 (1.089)	276.297 (6.888)	276.297 (4.757)	293.314 (1.208)	293.314 (1.201)	293.314 (7.212)	293.314 (4.404)
0.05	143.142 (1.214)	143.142 (1.258)	143.142 (7.499)	143.142 (5.444)	229.467 (1.123)	229.467 (1.301)	229.467 (7.995)	229.467 (5.400)	253.268 (1.135)	253.268 (1.412)	253.268 (8.122)	253.268 (4.699)
0.07	100.442 (1.101)	100.442 (1.178)	100.442 (7.905)	100.442 (5.036)	191.861 (1.119)	191.861 (1.414)	191.861 (6.204)	191.861 (5.628)	219.989 (1.164)	219.989 (1.610)	219.989 (7.007)	219.989 (5.857)
0.1	60.5857 (1.201)	60.5857 (1.131)	60.5857 (7.590)	60.5857 (5.084)	148.438 (1.191)	148.438 (1.241)	148.438 (8.002)	148.438 (5.800)	179.929 (1.000)	179.929 (1.211)	179.929 (7.221)	179.929 (5.957)
0.3	4.53174 (1.222)	4.53174 (1.147)	4.53174 (8.236)	4.53174 (5.011)	36.2223 (1.119)	36.2223 (1.178)	36.2223 (7.578)	36.2223 (5.909)	60.3653 (1.141)	60.3653 (1.283)	60.3653 (7.008)	60.3653 (4.308)
0.5	1.43564 (1.001)	1.43564 (1.155)	1.43564 (8.188)	1.43564 (5.123)	13.0757 (1.122)	13.0757 (1.333)	13.0757 (7.509)	13.0757 (5.870)	27.3631 (1.003)	27.3631 (1.166)	27.3631 (7.722)	27.3631 (4.023)
0.7	1.08655 (1.037)	1.08655 (1.147)	1.08655 (7.078)	1.08655 (5.285)	6.24296 (1.331)	6.24296 (1.222)	6.24296 (8.555)	6.24296 (5.000)	15.0631 (1.101)	15.0631 (1.405)	15.0631 (7.001)	15.0631 (5.171)
1	1.01375 (1.008)	1.01375 (1.278)	1.01375 (7.509)	1.01375 (4.080)	3.00692 (1.022)	3.00692 (1.308)	3.00692 (7.090)	3.00692 (5.000)	7.83386 (1.102)	7.83386 (1.389)	7.83386 (7.005)	7.83386 (5.000)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-9 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.000000101581$				$b = 0.00429321$				$b = 0.09242903$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	303.643 (1.002)	303.643 (1.024)	303.643 (7.226)	303.643 (5.107)	334.996 (1.213)	334.996 (1.222)	334.996 (8.141)	334.996 (4.066)	341.635 (1.255)	341.635 (1.288)	341.635 (7.212)	341.635 (5.000)
0.03	206.888 (1.101)	206.888 (1.244)	206.888 (7.012)	206.888 (5.253)	276.149 (1.105)	276.149 (1.238)	276.149 (8.408)	276.149 (5.519)	292.767 (1.102)	292.767 (1.272)	292.767 (7.000)	292.767 (4.981)
0.05	143.083 (1.217)	143.083 (1.254)	143.083 (7.129)	143.083 (5.552)	229.265 (1.540)	229.265 (1.196)	229.265 (7.205)	229.265 (5.512)	252.516 (1.200)	252.516 (1.408)	252.516 (8.121)	252.516 (4.799)
0.07	100.385 (1.150)	100.385 (1.232)	100.385 (8.000)	100.385 (4.308)	191.630 (1.475)	191.630 (1.122)	191.630 (8.173)	191.630 (5.455)	219.114 (1.119)	219.114 (1.300)	219.114 (8.211)	219.114 (5.000)
0.1	60.5386 (1.211)	60.5386 (1.200)	60.5386 (7.548)	60.5386 (4.679)	148.191 (1.201)	148.191 (1.387)	148.191 (7.330)	148.191 (5.008)	178.968 (1.301)	178.968 (1.681)	178.968 (8.039)	178.968 (5.110)
0.3	4.52466 (1.008)	4.52466 (1.301)	4.52466 (8.135)	4.52466 (4.222)	36.0735 (1.129)	36.0735 (1.283)	36.0735 (7.066)	36.0735 (5.111)	59.6763 (1.454)	59.6763 (1.500)	59.6763 (8.812)	59.6763 (5.012)
0.5	1.43438 (1.212)	1.43438 (1.250)	1.43438 (7.007)	1.43438 (5.100)	13.0024 (1.027)	13.0024 (1.230)	13.0024 (8.211)	13.0024 (5.422)	26.9629 (1.101)	26.9629 (1.200)	26.9629 (7.891)	26.9629 (5.098)
0.7	1.08625 (1.111)	1.08625 (1.180)	1.08625 (8.532)	1.08625 (5.125)	6.20382 (1.202)	6.20382 (1.500)	6.20382 (8.111)	6.20382 (4.971)	14.8167 (1.007)	14.8167 (1.315)	14.8167 (7.989)	14.8167 (5.491)
1	1.01369 (1.100)	1.01369 (1.250)	1.01369 (8.100)	1.01369 (5.010)	2.98881 (1.259)	2.98881 (1.555)	2.98881 (8.881)	2.98881 (5.090)	7.69818 (1.392)	7.69818 (1.201)	7.69818 (8.019)	7.69818 (5.000)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

จากตารางที่ (4-7) จากผลการวิจัยเปรียบเทียบเทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธี ได้แก่ กฎของค่ากลาง กฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน และกฎของเกาส์ บนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ โดยกำหนดให้ $ARL_0 = 370$ จากข้อมูลจำลองพบว่าผลลัพธ์ ARL_1 ที่ได้จากสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธีให้ค่าไม่แตกต่างกันในทุกพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) และทุกตัวแบบที่ศึกษาหากพิจารณาผลลัพธ์ ARL_1 เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและให้ผลเช่นเดียวกันทั้ง 4 วิธี โดยผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุด รองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา เมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผลพบว่าวิธีกฎของค่ากลางใช้เวลาในการประมวลผลน้อยสุดโดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ขณะที่ วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่า โดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 5-6 วินาที และ 7-10 วินาที ตามลำดับซึ่งผลนี้เกิดขึ้นในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง และทุกตัวแบบที่ศึกษาจากผลดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่าวิธีกฎของค่ากลางมีความเหมาะสมที่สุดสำหรับการนำไปใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

หากพิจารณาทั้งผลลัพธ์ ARL_1 และ CPU Time. จะพบว่าวิธีกฎของค่ากลางเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดรองลงมาคือวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู, วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ ตามลำดับโดยพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับได้ดีที่สุดสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ ในครั้งนี้คือ $\lambda = 0.05$ โดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสอดคล้องกันทั้งในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂ และ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ (4-8) และ ตารางที่ (4-9)

ตารางที่ 4-10 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001391458$				$b = 0.00590993$				$b = 0.10881961$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.318 (1.122)	410.318 (1.423)	410.318 (7.156)	410.318 (5.259)	452.774 (1.211)	452.774 (1.354)	452.774 (7.506)	452.774 (5.971)	459.487 (1.104)	459.487 (1.181)	459.487 (7.578)	459.487 (5.048)
0.03	279.527 (1.278)	279.527 (1.416)	279.527 (7.333)	279.527 (5.863)	373.279 (1.368)	373.279 (1.028)	373.279 (6.888)	373.279 (4.919)	390.353 (1.258)	390.353 (1.202)	390.353 (7.200)	390.353 (4.600)
0.05	193.257 (1.204)	193.257 (1.284)	193.257 (7.477)	193.257 (5.444)	309.948 (1.074)	309.948 (1.391)	309.948 (6.905)	309.948 (5.452)	334.075 (1.435)	334.075 (1.012)	334.075 (7.851)	334.075 (4.659)
0.07	135.512 (1.111)	135.512 (1.158)	135.512 (7.005)	135.512 (5.036)	259.093 (1.175)	259.093 (1.310)	259.093 (7.184)	259.093 (5.428)	287.859 (1.264)	287.859 (1.210)	287.859 (7.791)	287.859 (4.887)
0.1	81.6055 (1.291)	81.6055 (1.231)	81.6055 (7.895)	81.6055 (5.184)	200.372 (1.091)	200.372 (1.181)	200.372 (8.000)	200.372 (5.871)	232.939 (1.004)	232.939 (1.270)	232.939 (7.972)	232.939 (5.557)
0.3	5.78058 (1.279)	5.78058 (1.187)	5.78058 (7.656)	5.78058 (5.001)	48.6266 (1.319)	48.6266 (1.118)	48.6266 (7.642)	48.6266 (4.900)	74.6324 (1.041)	74.6324 (1.273)	74.6324 (7.017)	74.6324 (4.908)
0.5	1.58994 (1.301)	1.58994 (1.255)	1.58994 (7.787)	1.58994 (5.323)	17.3281 (1.299)	17.3281 (1.059)	17.3281 (7.548)	17.3281 (4.872)	32.9758 (1.103)	32.9758 (1.196)	32.9758 (7.777)	32.9758 (4.782)
0.7	1.11725 (1.137)	1.11725 (1.240)	1.11725 (7.878)	1.11725 (5.245)	8.08918 (1.082)	8.08918 (1.224)	8.08918 (7.555)	8.08918 (5.000)	17.8316 (1.151)	17.8316 (1.475)	17.8316 (7.000)	17.8316 (5.371)
1	1.01863 (1.108)	1.01863 (1.438)	1.01863 (7.585)	1.01863 (5.080)	3.71368 (1.251)	3.71368 (1.317)	3.71368 (7.874)	3.71368 (5.050)	9.08127 (1.202)	9.08127 (1.371)	9.08127 (7.975)	9.08127 (5.165)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-11 : ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂
เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.000000138567$				$b = 0.00585949$				$b = 0.10726137$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.301 (1.102)	410.301 (1.004)	410.301 (7.626)	410.301 (5.297)	452.703 (1.023)	452.703 (1.226)	452.703 (8.100)	452.703 (5.066)	459.316 (1.107)	459.316 (1.212)	459.316 (7.512)	459.316 (5.100)
0.03	279.493 (1.121)	279.493 (1.243)	279.493 (7.002)	279.493 (5.203)	373.181 (1.005)	373.181 (1.108)	373.181 (8.608)	373.181 (5.219)	389.942 (1.102)	389.942 (1.572)	389.942 (7.206)	389.942 (5.901)
0.05	193.219 (1.219)	193.219 (1.234)	193.219 (7.107)	193.219 (5.252)	309.815 (1.040)	309.815 (1.099)	309.815 (6.005)	309.815 (5.012)	333.519 (1.235)	333.519 (1.208)	333.519 (7.121)	333.519 (5.199)
0.07	135.475 (1.159)	133.475 (1.232)	133.475 (8.805)	133.475 (4.108)	258.940 (1.175)	258.940 (1.199)	258.940 (8.103)	258.940 (5.000)	287.222 (1.312)	287.222 (1.302)	287.222 (8.048)	287.222 (5.000)
0.1	81.5779 (1.244)	81.5779 (1.200)	81.5779 (7.208)	81.5779 (4.179)	200.208 (1.101)	200.208 (1.287)	200.208 (8.000)	200.208 (5.000)	232.254 (1.191)	232.254 (1.211)	232.254 (8.030)	232.254 (5.010)
0.3	5.77598 (1.216)	5.77598 (1.291)	5.77598 (7.635)	5.77598 (5.222)	48.5281 (1.309)	48.5281 (1.213)	48.5281 (7.367)	48.5281 (5.222)	74.1828 (1.154)	74.1828 (1.307)	74.1828 (8.000)	74.1828 (5.000)
0.5	1.58912 (1.232)	1.58912 (1.250)	1.58912 (7.097)	1.58912 (5.190)	17.2797 (1.007)	17.2797 (1.234)	17.2797 (8.000)	17.2797 (5.555)	32.7262 (1.128)	32.7262 (1.211)	32.7262 (7.800)	32.7262 (4.709)
0.7	1.11705 (1.117)	1.11705 (1.177)	1.11705 (8.632)	1.11705 (5.005)	8.06333 (1.382)	8.06333 (1.400)	8.06333 (8.000)	8.06333 (5.171)	17.6819 (1.109)	17.6819 (1.300)	17.6819 (7.316)	17.6819 (4.421)
1	1.01859 (1.140)	1.01859 (1.255)	1.01859 (8.022)	1.01859 (5.000)	3.70168 (1.250)	3.70168 (1.455)	3.70168 (7.801)	3.70168 (5.000)	9.00086 (1.312)	9.00086 (1.281)	9.00086 (8.000)	9.00086 (5.125)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 4-12: ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ เมื่อ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

δ	$\lambda = 0.05$				$\lambda = 0.1$				$\lambda = 0.15$			
	$b = 0.0000001373685$				$b = 0.005755755$				$b = 0.1040924$			
	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.	M.	T.	G.	S.
0.01	410.266 (1.112)	410.266 (1.209)	410.266 (7.000)	410.266 (5.212)	452.618 (1.481)	452.618 (1.556)	452.618 (7.324)	452.618 (5.000)	458.962 (1.315)	458.962 (1.214)	458.962 (7.356)	458.962 (5.000)
0.03	279.423 (1.118)	279.423 (1.322)	279.423 (7.843)	279.423 (5.763)	372.976 (1.169)	372.976 (1.300)	372.976 (6.955)	372.976 (4.359)	389.091 (1.118)	389.091 (1.152)	389.091 (8.155)	389.091 (4.451)
0.05	193.140 (1.197)	193.140 (1.123)	193.140 (8.137)	193.140 (4.989)	309.537 (1.647)	309.537 (1.500)	309.537 (7.870)	309.537 (4.777)	332.371 (1.035)	332.371 (1.300)	332.371 (7.518)	332.371 (4.444)
0.07	135.399 (1.097)	135.399 (1.186)	135.399 (7.666)	135.399 (4.156)	258.622 (1.370)	258.622 (1.100)	258.622 (7.000)	258.622 (5.213)	285.909 (1.168)	285.909 (1.354)	285.909 (8.000)	285.909 (5.451)
0.1	81.5144 (1.150)	81.5144 (1.500)	81.5144 (8.000)	81.5144 (5.000)	199.867 (1.301)	199.867 (1.206)	199.867 (7.329)	199.867 (5.005)	230.483 (1.111)	230.483 (1.554)	230.483 (7.914)	230.483 (5.158)
0.3	5.76642 (1.106)	5.76642 (1.299)	5.76642 (7.757)	5.76642 (4.988)	48.3236 (1.111)	48.3236 (1.333)	48.3236 (7.887)	48.2088 (5.000)	73.2623 (1.134)	73.2623 (1.281)	73.2623 (8.000)	73.2623 (5.000)
0.5	1.58742 (1.142)	1.58742 (1.789)	1.58742 (8.000)	1.58742 (5.000)	17.1792 (1.007)	17.1792 (1.959)	17.1792 (7.000)	17.1792 (4.959)	31.2164 (1.200)	31.2164 (1.500)	31.2164 (7.111)	31.2164 (4.777)
0.7	1.11663 (1.500)	1.11663 (1.381)	1.11663 (7.955)	1.11663 (5.989)	8.00977 (1.456)	8.00977 (1.500)	8.00977 (7.555)	8.00977 (5.391)	17.3768 (1.421)	17.3768 (1.455)	17.3768 (8.000)	17.3768 (5.391)
1	1.01851 (1.182)	1.01851 (1.200)	1.01851 (8.000)	1.01851 (4.303)	3.67696 (1.259)	3.67696 (1.300)	3.67696 (7.601)	3.67696 (5.000)	8.83703 (1.072)	8.83703 (1.581)	8.83703 (7.841)	8.83703 (5.000)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

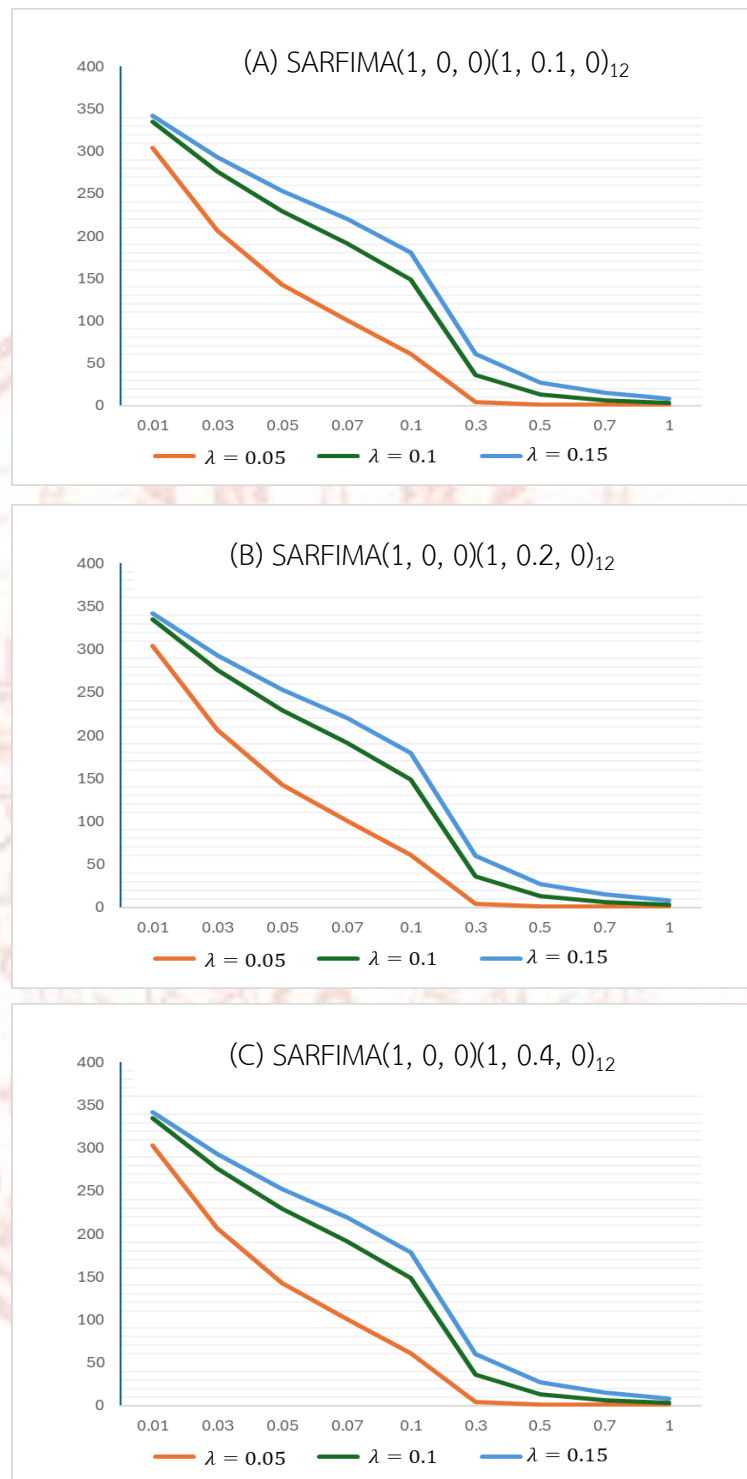
** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

จากตารางที่ (4-10) จากผลการวิจัยเปรียบเทียบเทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธี ได้แก่ กฎของค่ากลาง กฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน และกฎของเกาส์ บนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ เมื่อ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ โดยกำหนดให้ $ARL_0 = 500$ จากข้อมูลจำลองพบว่าผลลัพธ์ ARL_1 ที่ได้จากสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 4 วิธีให้ค่าไม่แตกต่างกันในทุกพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) และทุกตัวแบบที่ศึกษาหากพิจารณาผลลัพธ์ ARL_1 เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงและให้ผลเช่นเดียวกันทั้ง 4 วิธี โดยผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุด รองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา เมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผลพบว่าวิธีกฎของค่ากลางใช้เวลาในการประมวลผลน้อยสุดโดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 1-2 วินาที ขณะที่ วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่า โดยใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 5-6 วินาที และ 7-10 วินาที ตามลำดับซึ่งผลนี้เกิดขึ้นในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง และทุกตัวแบบที่ศึกษาจากผลดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่าวิธีกฎของค่ากลางมีความเหมาะสมที่สุดสำหรับ

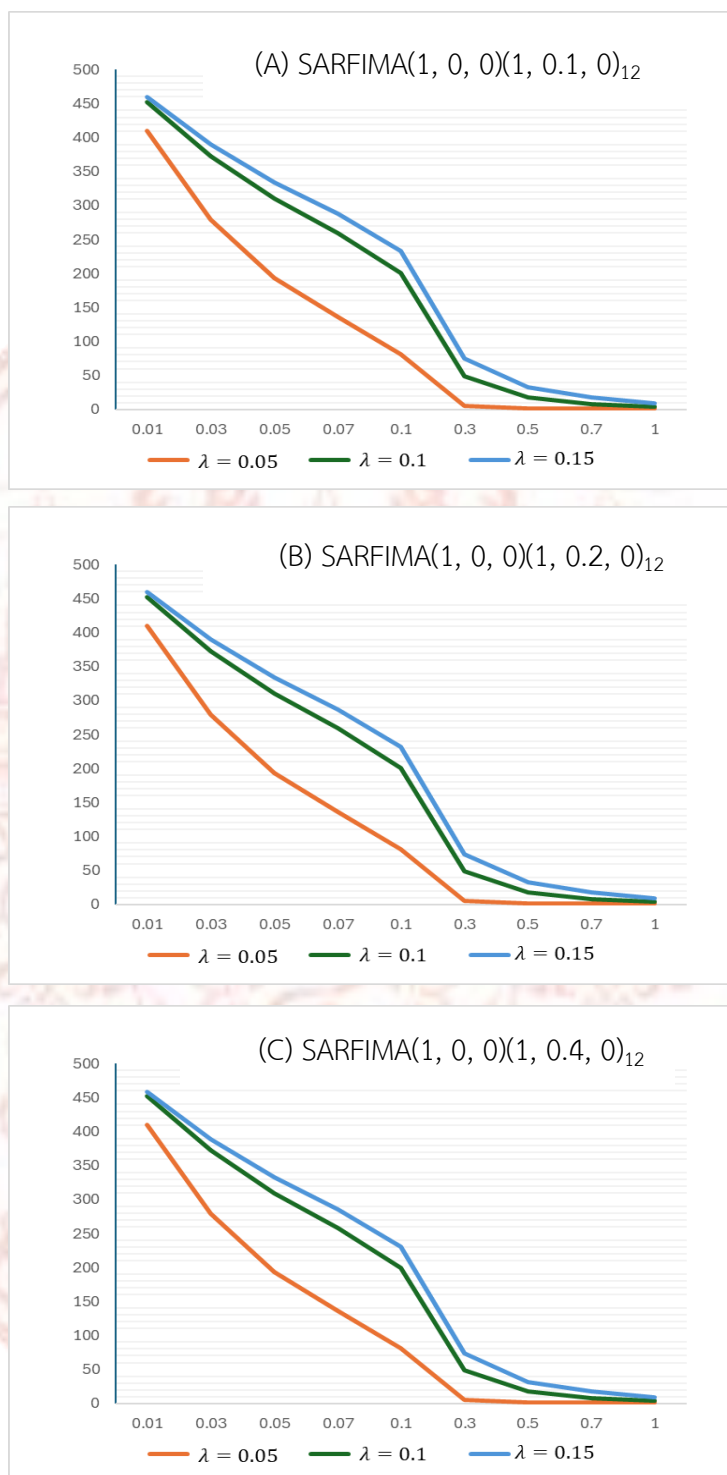
การนำไปใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

หากพิจารณาทั้งผลลัพธ์ ARL_1 และ CPU Time. จะพบว่าวิธีของค่ากลางเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดรองลงมาเป็นวิธีของสี่เหลี่ยมคางหมู, วิธีของซิมป์สันและวิธีของเกาส์ ตามลำดับโดยพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับได้ดีที่สุดสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ โดยกำหนดให้ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ ในครั้งนี้คือ $\lambda = 0.05$ โดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสอดคล้องกันทั้งในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂ และ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ (4-11) และตารางที่ (4-12)





ภาพที่ 4-3 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีหาค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ
 ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$



ภาพที่ 4-4 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 จากวิธีหาค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับ
 ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D , 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$

จากภาพที่ 4-3 แสดงให้เห็นว่า ARL_1 ที่ได้จากวิธีของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ของแผนภูมิควบคุม เท่ากับ 0.05, 0.1 และ 0.15 ภายใต้ตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ สำหรับ $ARL_0 = 370$ โดยที่ $\Phi_1 = 0.1$ และ $\phi_1 = -0.1$ ซึ่งแสดงในรูปย่อย (a) - (c) พบว่าผลลัพธ์ของ ARL_1 เมื่อ $\lambda = 0.05$ ให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุดรองลงมาคือ $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.15$ ตามลำดับในทุกะดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (δ) และทุกตัวแบบที่ศึกษา ต่อมาเมื่อพิจารณาระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการพบว่าเมื่อขนาดของการเปลี่ยนแปลง (δ) มีค่ามากขึ้นผลลัพธ์ค่า ARL_1 จะมีค่าลดลงในทุกะดับการเปลี่ยนแปลงและทุกตัวแบบที่ศึกษา และมีแนวโน้มลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบขนาดเล็ก ($0.01 \leq \delta < 0.5$) ซึ่งแสดงในรูปย่อย (a) - (c) และจากภาพที่ 4-4 ซึ่งพิจารณาจากกรณีที่ $ARL_0 = 500$ ก็ยังคงให้ผลสอดคล้องกัน

4.4 การประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

ในส่วนนี้จะใช้แผนภูมิควบคุมที่เสนอนำไปประยุกต์ใช้สำหรับข้อมูลจริง ซึ่งแผนภูมิที่นำมาใช้คือแผนภูมิควบคุม EWMA โดยใช้ข้อมูลราคาย้อนหลังของหุ้น CPF ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม พ.ศ.2559 ถึงวันที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2567

จากการทดสอบพบว่าชุดข้อมูลจริงมีค่าความคลาดเคลื่อนแบบเลขชี้กำลังเกี่ยวกับ ผลต่างของค่าสังเกตและค่าประมาณ (Residual) โดยใช้ค่าสังเกต (Actual) คือ ราคาย้อนหลังของ หุ้น CPF โดยค่า $\Phi_1 = 0.6485$ และ $\phi_1 = 0.9997$ และประมาณค่า (Fitted) ด้วยตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ดังในตารางที่ 4-13 เปรียบเทียบ ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ โดยกำหนดค่าเป้าหมาย $ARL_0 = 370$ และ $ARL_0 = 500$ ในตารางที่ 4-14 และ ตารางที่ 4-15 โดยใช้วิธีของค่ากลางมาทดสอบเนื่องจากทดสอบมาแล้วว่าใช้เวลาในการรันผลน้อยที่สุด

ตารางที่ 4-13 : ข้อมูลราคาย้อนหลังของ หุ้น CPF (บาท)

DATA							
No.	Actual	Fitted	Residual	No.	Actual	Fitted	Residual
1	19.5	19.29637	0.2036	26	33.75	33.71192	0.0381
2	24.4	22.75734	1.6427	27	28.75	26.52901	2.2210
3	29.25	26.27883	2.9712	28	28.75	28.10082	0.6492
4	32.5	31.39531	1.1047	29	29.5	29.20991	0.2901
5	31.75	31.42764	0.3224	30	26	25.82797	0.1720
6	28.5	28.45998	0.0400	31	25.5	24.88391	0.6161
7	28	27.90957	0.0904	32	25.25	24.0354	1.2146
8	27.75	26.70005	1.0499	33	24.1	23.83728	0.2627
9	24.8	24.76338	0.0366	34	26	25.0038	0.9962
10	24.6	23.84593	0.7541	35	25	24.37828	0.6217
11	27.25	24.6526	2.5974	36	25.25	24.33489	0.9151
12	24	22.8799	1.1201	37	24.8	23.47403	1.3260
13	27.25	25.448	1.8020	38	20.1	19.39974	0.7003
14	25	24.60861	0.3914	39	19.7	19.67532	0.0247
15	27.25	25.60749	1.6425	40	20.3	19.93301	0.3670
16	25.5	25.48823	0.0118	41	20.7	20.69469	0.0053
17	27.25	26.13982	1.1102	42	20.7	20.44917	0.2508
18	27.75	26.83043	0.9196	43	19.9	19.00815	0.8919
19	28.25	28.06439	0.1856	44	18.5	18.48961	0.0104
20	27.75	27.52571	0.2243	45	19.8	19.24242	0.5576
21	27.5	25.61244	1.8876	46	22.8	21.84431	0.9557
22	30	28.19999	1.8000	47	24	23.10777	0.8922
23	27	25.08091	1.9191	48	24.6	24.46051	0.1395
24	31.5	29.25965	2.2403	49	24.8	24.73203	0.0680
25	31.75	31.29866	0.4513				

ตารางที่ 4-14 : การเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $ARL_0 = 370$ โดยใช้วิธีหาค่ากลาง

SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0) ₁₂			
δ	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.15$
	$b = 0.8972$	$b = 0.9245$	$b = 1.1547$
0.01	349.025 (1.609)	349.952 (1.419)	364.158 (1.139)
0.03	311.642 (1.579)	314.169 (1.555)	354.443 (1.792)
0.05	279.477 (1.561)	283.323 (1.481)	347.253 (1.161)
0.07	251.664 (1.671)	256.601 (1.571)	342.480 (1.231)
0.1	216.608 (1.563)	222.840 (1.593)	339.802 (1.343)
0.3	95.331 (1.531)	104.976 (1.601)	277.976 (1.231)
0.5	52.453 (1.529)	62.528 (1.319)	109.424 (1.769)
0.7	33.375 (1.532)	43.347 (1.522)	90.919 (1.363)
1	20.243 (1.516)	29.988 (1.566)	70.421 (1.577)

* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

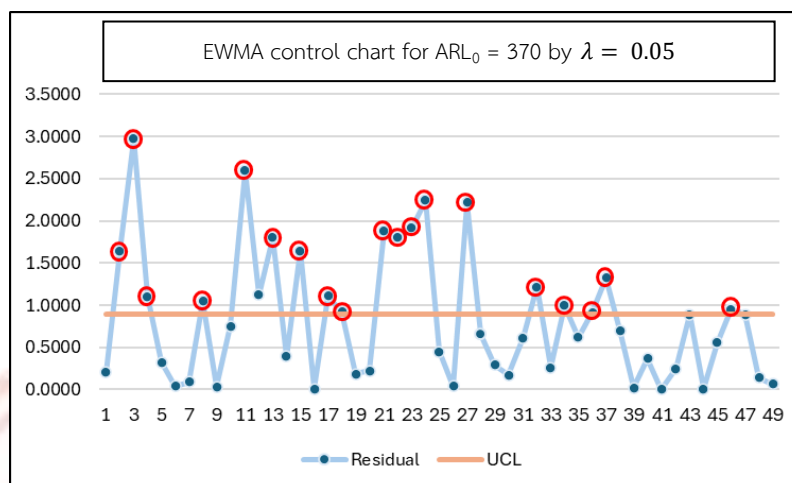
ตารางที่ 4-15 : การเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $ARL_0 = 500$ โดยใช้วิธีหาค่ากลาง

SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0) ₁₂			
δ	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.15$
	b = 0.9895	b = 1.0698	b = 1.5652
0.01	470.239 (1.593)	471.978 (1.453)	485.124 (1.593)
0.03	417.412 (1.515)	422.134 (1.835)	461.167 (1.515)
0.05	372.217 (1.625)	379.364 (1.655)	420.590 (1.625)
0.07	333.352 (1.563)	342.476 (1.533)	400.189 (1.563)
0.1	284.680 (1.517)	296.110 (1.535)	387.239 (1.517)
0.3	119.983 (1.594)	137.018 (1.504)	309.468 (1.594)
0.5	63.923 (1.485)	81.397 (1.576)	249.465 (1.485)
0.7	39.668 (1.625)	56.912 (1.444)	171.903 (1.625)
1	23.384 (1.619)	40.538 (1.345)	101.645 (1.610)

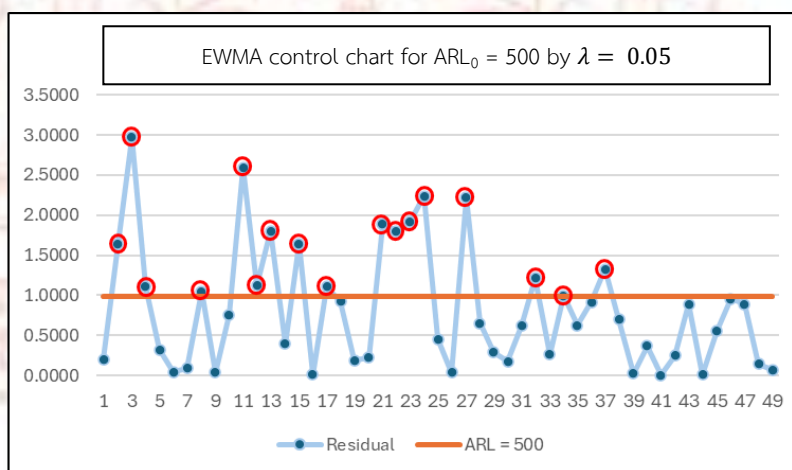
* ตัวเลขคือค่าความยาวรันเฉลี่ย กรณีที่ตัวแบบไม่อยู่ภายใต้ควบคุม (ARL_1)

** ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) มีหน่วยเป็นวินาที

จากการวิเคราะห์จะเห็นได้ว่าที่ $\lambda = 0.05$ ให้ค่าขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) น้อยที่สุดและให้ค่า ARL_1 น้อยที่สุดในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นมี $\lambda = 0.05$ มีประสิทธิภาพมากที่สุด ค่าสถิติสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $ARL_0 = 370$ และ $ARL_0 = 500$ โดยที่ $\lambda = 0.05$ เนื่องจากมีประสิทธิภาพมากที่สุดโดยแสดงในตารางที่ 4-14 และตารางที่ 4-15 ผลการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 4-5 และรูปที่ 4-6



ภาพที่ 4-5 ประสิทธิภาพในการตรวจจับของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริงเมื่อ $ARL_0 = 370$



ภาพที่ 4-6 ประสิทธิภาพในการตรวจจับของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริงเมื่อ $ARL_0 = 500$

จากตารางที่ 4-14 และ ตารางที่ 4-15 จะเห็นได้ว่า เมื่อทดสอบข้อมูลกับข้อมูลจริงแผนภูมิควบคุม EWMA ที่มี $\lambda = 0.05$ ประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีที่สุดในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง

จากภาพที่ 4-5 แสดงแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $\lambda = 0.05$ ได้ค่า UCL = 0.8972 ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (4-26) โดยกำหนดค่าเป้าหมาย $ARL_0 = 370$ เมื่อค่า $\Phi_1 = 0.6485$ และ $\phi_1 = 0.9997$ จะเห็นได้ว่ามีค่าสังเกตอยู่นอกขีดจำกัดควบคุมทั้งหมด 20 จุด และจากภาพที่ 4-6 เมื่อทดสอบที่ค่าเป้าหมาย $ARL_0 = 500$ บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ ที่ $\lambda = 0.05$ ได้ค่า UCL = 0.9895 ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (4-26) จะเห็นได้ว่า มีค่าสังเกตอยู่นอกขีดจำกัดควบคุมทั้งหมด 17 จุด ซึ่งผลการวิเคราะห์จากข้อมูลจริงให้ผลในทิศทางเดียวกันกับการจำลองข้อมูล คือ แผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4769, 0)₁₂ เมื่อ $\lambda = 0.05$ มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบได้ดีที่สุด

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขที่สามารถใช้ในการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยพิจารณาเทคนิคที่สนใจ 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule Method) วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule Method) วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule Method) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule Method) สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ ซึ่งประกอบด้วยตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂, SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.2, 0)₁₂ และ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.4, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาขึ้นมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และใช้ค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL₁) เป็นเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพและมีการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

จากผลการวิจัยพบว่า ค่า ARL₁ ที่ได้จากเทคนิคสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี มีแนวโน้มลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยในตัวแบบเพียงเล็กน้อย โดยค่า ARL₁ ที่ได้จากแต่ละวิธีไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญในทุกกรณีของตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ ที่ทำการศึกษาให้ค่า ARL₁ ไม่แตกต่างกันในทุกพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผล พบว่า วิธีกฎของค่ากลาง ใช้เวลาน้อยที่สุด ในทุกระดับของการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบ จึงถือเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการนำไปใช้ในการคำนวณค่า ARL₁ สำหรับการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA ในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนขาขึ้นขาขึ้นที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ของแผนภูมิควบคุมที่ศึกษาคือ 0.05, 0.1 และ 0.15 ของทุกตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ บนแผนภูมิควบคุม EWMA พบว่า วิธีกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อ $\lambda = 0.05$ มีการตรวจจับได้ดีกว่ากรณีอื่นๆ และสามารถตรวจจับได้รวดเร็วกว่าอย่างเห็นได้ชัด เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของตัวแบบขนาดเล็ก ($0.01 \leq \delta < 0.5$) หากพิจารณาทั้งผลลัพธ์ ARL₁ และ CPU Time. จะพบว่าวิธีกฎของค่ากลางเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดรองลงมาคือวิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู, วิธีกฎของซิมป์สันและวิธีกฎของเกาส์ ตามลำดับโดยพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (λ) ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับได้ดีที่สุดสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA บนตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, 0.1, 0)₁₂ คือ $\lambda = 0.05$

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากงานวิจัยสำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA ในตัวแบบ SARFIMA(1, 0, 0)(1, D, 0)₁₂ พบว่าที่ $\lambda = 0.05$ มีการตรวจจับได้ดีที่สุดในงานวิจัยครั้งต่อไปอาจขยายขอบเขตการศึกษาต่อในเรื่องวิธีการปรับปรุงเชิงตัวเลขวิธีอื่นๆ และในงานวิจัยนี้ใช้เกณฑ์การวัดประสิทธิภาพ คือ ค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ดังนั้นในงานวิจัยครั้งต่อไปสามารถใช้เกณฑ์อื่นๆ ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม เช่น Relative Mean Index (RMI), Average Extra Quadratic Loss (AEQL) และ Performance Comparison Index (PCI) นอกจากนี้ยังควรมีการศึกษาตัวแบบ SARFIMA(p, d, q)(P, D, Q)₁₂ ในกรณีที่ d ไม่เท่ากับ 0 เพื่อวัดประสิทธิภาพที่ตัวแบบเป็น Non-stationary เป็นต้น



บรรณานุกรม

- Adewole, A. I., & Amurawaye, F. F. (2024). Modeling temperature forecast in Ogun State Nigeria with SARFIMA and SARIMA. *Journal of Science and Information Technology*, 18(1), 109–119.
- Brook, D., & Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of cumulative sum charts. *Biometrika*, 59(3), 539–549.
- Carlin, B. P., & Dempster, A. P. (1989). The monthly unemployment rate for men in the United States: A Bayesian analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405), 1106–1117.
- Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1991). *A comparison of the performance of several control charts for detecting shifts in the mean*. *Technometrics*, 33(2), 199–209.
- Champ, K., & Rigdon, S. E. (1991). A numerical integral equation approach for process control charts. *Journal of Quality Technology*, 23(3), 154–163.
- Devianto, D., Wahyuni, E., Maiyastri, M., & Yollanda, M. (2024). The seasonal model of chili price movement with the effect of long memory and exogenous variables for improving time series model accuracy. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 10, Article 1408381.
- Granger, C. W. J., & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1), 165–176.
- Ibrazizen, M., & Fellag, H. (2003). Bayesian estimation of an AR(1) process with exponential white noise. *Statistics*, 37(5), 365–372.

- Jacob, D., & Lewis, P. A. W. (1977). Time series regression with exponentially distributed and other non-normal errors. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(2), 272–280.
- Lucas, J. M., & Crosier, R. B. (1982). Fast initial response for cumulative sum quality-control schemes: Give your CUSUM a head start. *Technometrics*, 24(3), 199–205.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1/2), 100–115
- Peerajit, W., & Areepong, Y. (2023). Alternative to detecting changes in the mean of an autoregressive fractionally integrated process with exponential white noise running on the modified EWMA control chart. *Processes*, 11(2), Article 503.
- Qi, Y., Zhang, Z., Zhu, Y., Liu, J., Li, C., Wang, J., & Li, X. (2020). SARFIMA model prediction for infectious diseases: Application to hemorrhagic fever with renal syndrome and comparison with SARIMA. *BMC Infectious Diseases*, 20(1), 1–12.
- Ray, J. (1993). *Monthly revenue from IBM products*. Publisher.
- Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3), 239–250.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. Van Nostrand.
- Suriyakat, W., Areepong, Y., Sukparungsee, S., & Mititelu, G. (2012). On EWMA procedure for AR(1) observations with exponential white noise. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 77, 73–83.
- Udo, M. E., & Shittu, O. I. (2022). A comparative study of SARIMA and SARFIMA models: An application to solar radiation data. *Journal of Physics: Conference Series*, 2191(1), 012030.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นายรัตนชาติ ฤณพล
ชื่อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลจากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข
สาขาวิชา	สถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล
ประวัติ	- สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาสถิติธุรกิจและ การประกันภัย ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ในปีการศึกษา 2565 - ศึกษาต่อในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาสถิติประยุกต์และวิทยาการวิเคราะห์ข้อมูล ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือในปีการศึกษา 2566